Matematikai logika - 5. előadás

2010. november 9.

Bizonyításelmélet (folytatás)

Dedukciós tétel Legyen Σ formulahalmaz és ϕ, ψ formula. Ekkor a következők ekvivalensek:

$$\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \psi \tag{1}$$

$$\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi \tag{2}$$

Bizonyítás (1) $\Rightarrow$ (2): lásd előző előadás. (2) $\Rightarrow$ (1): ha $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, akkor van olyan véges $\alpha_1 \dots \alpha_n$ formulasorozat, hogy $\alpha_n = \psi$ és $\forall i \leq n$-re

$$\alpha_i \begin{cases} \text{axióma vagy} \\ \in \Sigma \cup \{\phi\} \text{ (azaz } \alpha_i \in \Sigma \text{ vagy } \alpha_i = \phi\text{) vagy} \\ \text{van } k, l < i : \alpha_i \text{ megkapható Modus Ponenssel } \alpha_k, \alpha_l\text{-ből.} \end{cases}$$

i-re vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_i$ ($i = n$-re ez éppen (1)).

$i = 1$ **esetén**

α_1 axióma esetén:

$\Sigma \vdash \alpha_1 \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_1$ (ez az első axióma egy példánya)

α_1 axióma

$\phi \Rightarrow \alpha_1$ Modus Ponenssel kapható az előző kettőből.

$\alpha_1 \in \Sigma$ hasonlóan:

$\Sigma \vdash \alpha_1 \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_1$ (ez az első axióma egy példánya)

$\alpha_1 \in \Sigma$

$\phi \Rightarrow \alpha_1$ Modus Ponenssel kapható az előző kettőből.

ha $\alpha_1 = \phi$:

$\emptyset \vdash \phi \Rightarrow \phi$ ezért $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \phi$.

Indukciós lépés Tegyük fel, hogy ha $j < i$, akkor $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_j$ (kell $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_i$)

ha α_i axióma vagy $\alpha_i \in \Sigma \cup \{\phi\}$, akkor $i = 1$ esethez hasnolóan $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_i$.

ha α_i Modus Ponenssel jön α_k, α_l-ből ($k, l < i$), akkor $\alpha_k = \alpha_l \Rightarrow \alpha_i$ és az indukciós feltevés miatt $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_k$ azaz $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow (\alpha_l \Rightarrow \alpha_i)$ és $\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \alpha_l$

Ekkor a 2. axiómát kétszer kombinálva a modus ponens-sel:

$$(\phi \Rightarrow \alpha_l \Rightarrow \alpha_i) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \alpha_l) \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_i$$

$$(\phi \Rightarrow \alpha_l) \Rightarrow \phi \Rightarrow \alpha_i$$

$$\phi \Rightarrow \alpha_i.$$

□

Definíció Legyen Σ formulahalmaz. Azt mondjuk, hogy Σ ellentmondásos, ha van olyan ϕ formula, hogy $\Sigma \vdash \phi, \Sigma \vdash \neg\phi$.

Tétel Az alábbiak közül (1) ekvivalens (2)-vel és (3) ekvivalens (4)-el.

1. $\Sigma \vdash \phi$
2. $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ ellentmondásos.
3. $\Sigma \vdash \neg\phi$
4. $\Sigma \cup \{\phi\}$ ellentmondásos.

Bizonyítás

(1)⇒ (2) $\vdash$ monotonitása (azaz multkori (1)) miatt $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$. Továbbá nyilván $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\phi$. (mert $\in \Sigma \cup \{\neg\phi\}$. Tehát $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ ellentmondásos.

(2)⇒ (1) $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ ellentmondásos, ezért van olyan α, hogy

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \alpha & \text{és} & \Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\alpha \\ \downarrow_{\text{dedukciós t. miatt}} & & \downarrow_{\text{dedukciós t. miatt}} \\ \Sigma \vdash \neg\phi \Rightarrow \alpha & & \Sigma \vdash \neg\phi \Rightarrow \neg\alpha \end{array}$$

Ekkor

$\Sigma \vdash (\neg\phi \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\neg\phi \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \phi$ (3. axióma miatt)

$\Sigma \vdash \phi$ (Modus Ponens kétszer).

(3)⇒ (4) (3) miatt

$\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \neg\phi$ (monotonitás miatt)

$\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \phi$ (mert szerepel a bal oldalon)

Tehát $\Sigma \cup \{\phi\}$ ellentmondásos.

(4)$\Rightarrow$ (3) Vegyük észre: $\{\neg\neg\phi, \neg\phi\}$ ellentmondásos, ezért a tétel már igazolt része miatt $\{\neg\neg\phi\} \vdash \phi$. (4) szerint $\Sigma \cup \{\phi\}$ ellentmondásos így $\Sigma \cup \{\neg\neg\phi\}$ is ellentmondásos (hiszen $\Sigma \cup \{\neg\neg\phi\} \vdash \phi$ és $\Sigma \cup \{\phi\}$ ellentmondásos). Így (2) $\Leftrightarrow$ (1) miatt $\Sigma \vdash \neg\phi$ azaz (3) teljesül.
$\square$

Tétel Ellentmondásos Σ-ból minden levezethető.

Bizonyítás Legyen Σ ellentmondásos és ϕ tetszőleges. Mivel Σ ellentmondásos, ezért van olyan α, hogy $\Sigma \vdash \alpha, \Sigma \vdash \neg\alpha$, ekkor $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \alpha$ és $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\alpha$. Ezekből pedig következik, hogy $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ is ellentmondásos. Így az előző tétel miatt $\Sigma \vdash \phi$. $\square$

Definíció Legyen Σ formulahalmaz. Σ teljes, ha tetszőleges ϕ formulára $\Sigma \vdash \phi$ vagy $\Sigma \vdash \neg\phi$.

Tétel Ha Σ ellentmondástalan formulahalmaz, akkor van olyan Σ' teljes, ellentmondástalan formulahalmaz, hogy $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Sőt tetszőleges ϕ-re $\phi \in \Sigma'$ vagy $\neg\phi \in \Sigma'$.

Bizonyítás A formulák halmaza megszámlálhatóan végtelen, így fel tudjuk őket sorolni. Legyen $\{\alpha_i : i \in N\}$ egy ilyen felsorolás.

Megadjuk formulahalmazok egy $\Sigma_0, \Sigma_1 \ldots$ végtelen sorozatát úgy, hogy

1. $\Sigma_0 = \Sigma, i \leq j \Rightarrow \Sigma_i \subseteq \Sigma_j$;
2. Σ_i ellentmondástalan;
3. $\alpha_i \in \Sigma_{i+1}$ vagy $\neg\alpha_i \in \Sigma_{i+1}$;

Legyen $\Sigma_0 = \Sigma$. Tegyük fel, hogy ha $j \leq i$, akkor Σ_j adott már úgy, hogy 1-3 teljesül.
Legyen $\Sigma_{i+1} = \begin{cases} \Sigma_i \cup \{\alpha_i\}, \text{ha ez ellentmondástalan} \\ \Sigma_i \cup \{\neg\alpha_i\} \text{ egyébként.} \end{cases}$

Ha $\Sigma \cup \{\alpha_i\}$ ellentmondásos, akkor az előző tétel szerint $\Sigma_i \vdash \neg\alpha_i$, ezért mindkét esetben 1-3. érvényben marad.

Legyen $\Sigma' = \bigcup_{n \in N} \Sigma_n$.

1. miatt $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

3. miatt tetszőleges α-ra $\alpha \in \Sigma'$ vagy $\neg\alpha \in \Sigma'$.

Végül Σ' ellentmondástalan, mert tegyük fel indirekt, hogy Σ' ellentmondásos. Ekkor van olyan ϕ formula, hogy $\Sigma' \vdash \phi, \Sigma' \vdash \neg\phi$. $\Sigma' \vdash \phi$ és $\Sigma' \vdash \neg\phi$ véges levezetés, így van olyan n, hogy $\Sigma_n \vdash \phi, \Sigma_n \vdash \neg\phi$, ami pedig ellentmond 2.-nek.

$\square$

Teljességi tétel Ekvivalensek:

1. $\Sigma \vDash \phi$.
2. $\Sigma \vdash \phi$.

Megjegyzés $1 \Rightarrow 2$ a kalkulus teljessége: ha egy következtetés helyes, akkor azt formálisan be is lehet bizonyítani. $2 \Rightarrow 1$ a kalkulus helyessége.

Bizonyítás

$1 \Rightarrow 2$ Tegyük fel, hogy $\Sigma \vDash \phi$, de $\Sigma \nvdash \phi$, azaz $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ ellentmodástalan.

Cél: van olyan k interpretáció, hogy $k \vDash \Sigma \cup \{\neg\phi\}$. (Ez elég, mert ez a k mutatja, hogy $\Sigma \nvDash \phi$, ami ellentmond 1.-nek.

Legyen $\Gamma = \Sigma \cup \{\neg\phi\}$; ez ellentmondástalan. Ekkor elég: van $k \vDash \Gamma$.

Az előző tétel szerint van teljes, ellentmondástalan $\Gamma' : \Gamma \subseteq \Gamma'$. (Sőt tetszőleges α-ra $\alpha \in \Gamma'$ vagy $\neg\alpha \in \Gamma'$).

Ha x ítéletváltozó, akkor legyen $k(x) = \begin{cases} \text{igaz, ha } x \in \Gamma' \\ \text{hamis különben} \end{cases}$

Figyeljük meg: $k(x) = i \Leftrightarrow x \in \Gamma'$.

ϕ összetettsége szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy

$$k \vDash \phi \text{ pontosan akkor, ha } \phi \in \Gamma'. \tag{3}$$

1. Ha ϕ ítéletváltozó, akkor (3) k definíciója miatt igaz.
2. Tegyük fel, hogy (3) igaz ϕ-re és ψ-re.
3. Belátjuk (3)-t $\neg\phi$-re: $k \vDash \neg\phi$ pont akkor, ha $k \nvDash \phi$. Az indukció miatt pont akkor, ha $\phi \notin \Gamma'$ pont akkor $\neg\phi \in \Gamma'$.

(3)-t belátjuk $\phi \Rightarrow \psi$-re is:
$k \vDash \phi \Rightarrow \psi$ pont akkor, ha $k \nvDash \phi$ vagy $k \vDash \phi$ (az implikáció definíciója miatt)
Az indukcióból: $\phi \notin \Gamma'$ ((a) eset) vagy $\psi \in \Gamma'$ ((b) eset). Kell: $\phi \Rightarrow \psi \in \Gamma'$.

(a) esetben $\neg\phi \in \Gamma'$ (Γ teljessége és ellentmondásmentessége miatt.) $\{\neg\phi, \phi\}$ ellentmondásos ezért $\{\neg\phi, \phi\} \vdash \psi$ így a dedukciós tétel miatt $\neg\phi \vdash \phi \Rightarrow \psi$.

Ezért $\phi \Rightarrow \psi \in \Gamma$, különben Γ' teljessége miatt ellentmondásos lenne.

(b) esetben $\psi \in \Gamma'$
$\psi \vdash \psi \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi$ (1. axióma)
ψ
$\phi \Rightarrow \psi$ (MP)
Ezért $\phi \Rightarrow \psi \in \Gamma'$, különben Γ' teljessége miatt ellentmondásos lenne.

Eddig kaptuk: Ha $k \vDash \phi \Rightarrow \psi$ akkor $\phi \Rightarrow \psi \in \Gamma'$.

Fordítva: Ha $\phi \Rightarrow \psi \in \Gamma'$ akkor állítjuk, hogy $\neg\phi \in \Gamma'$ vagy $\psi \in \Gamma'$: különben, $\phi \in \Gamma', \neg\psi \in \Gamma'$ következne, ezt $\Gamma' \vdash \phi \Rightarrow \psi$-vel és MP-vel kombinálva $\Gamma' \vdash \psi$ adódna, de ekkor Γ' ellentmondásos lenne.

Ha tehát $\phi \Rightarrow \psi \in \Gamma'$, akkor az előző néhány sor miatt $\neg\phi \in \Gamma'$ vagy $\psi \in \Gamma'$ következésképp, az indukció miatt $k \vDash \neg\phi$ vagy $k \vDash \psi$.

Mindkét esetben $k \vDash \phi \Rightarrow \psi$.

Tehát (3) fennáll.
Így $1 \Rightarrow 2$ (teljesség) megvan. $\square$