Halmazelmlet ZH
BME TTK, 2013 Április 18.

1. Legyen $\langle A_i : i \in \omega \rangle$ egy halmazrendszer. Igazoljuk, hogy

$$\bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k>n} A_k \quad \subseteq \quad \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k>n} A_k.$$

(13 pont)

2. Igazoljuk, hogy A pontosan akkor tranzitív halmaz, ha $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

(8 pont)

3. Legyen $\langle A, \leq \rangle$ egy részbenrendezett halmaz. Igazoljuk, hogy van olyan lineárisan rendezett $X \subseteq A$, hogy minden $a \in A - X$-re $X \cup \{a\}$ már nem lineárisan rendezett (útmutatás: alkalmazzuk a Zorn-lemmát).

(13 pont)

4. Legyen $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$ lineárisan rendezett halmaz, és minden $x \in A$-ra legyen $A_x = \{a \in A : a < x\}$. Igazoljuk, hogy ha minden $x \in A$-ra teljesül, hogy A_x izomorf valamely rendszám $\in$-struktúrájával, akkor $\mathcal{A}$ is izomorf valamely rendszám $\in$-struktúrájával.

(13 pont)

5. Legyen $A = \{s : \omega \to \mathbf{Q}, \quad s \text{ divergens sorozat } \}$
(itt $\mathbf{Q}$ a racionális számok halmaza).

Adjunk meg egy injektív $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to A$ függvényt.

(13 pont)

Minden választ indokoljunk !