

## Lineáris algebra

### 2. Feladatsor

- Határozzuk meg az  $(1 + 2001i)^{2001}/(1 - 2001i)^{2001}$  komplex szám abszolút értékét!
- a) Számítsuk ki a  $16 - 30i$  komplex szám négyzetgyökeit!  
b) Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok körében minden számból lehet négyzetgyököt vonni!
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:  
a)  $z^2 + 1 = 0$   
b)  $z^2 = -12$   
c)  $z^2 + 3z + 4 = 0$   
d)  $z^2 = i$   
e)  $z^2 + 2iz + 1 + i = 0$
- a) Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy komplex számot megszorozunk  $(1 + i)$ -vel?  
b) Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy komplex számnak vesszük a reciprokát!
- Hozzuk trigonometrikus alakra:  
a)  $-8$   
b)  $-\sqrt{3}/2 + 1/2i$   
c)  $1 - itg(\alpha)$   
d)  $sin12^0 - icos12^0$
- Számítsuk ki  
a) a  $(-\sqrt{3} + i)^{-9}$  komplex szám értékét és hozzuk az eredményt algebrai alakra!  
b)  $-243i$  összes ötödik gyökét trigonometrikus alakban!  
c) a  $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$  egyenlet összes megoldását!  
d) a  $\bar{z} = z^n$   $n \in N$  összes megoldását!
- a) Tetszőleges  $n$  természetes számra számítsuk ki zárt alakban az  $(1 + i)^n$  értékét!  
b) Adjuk meg zárt alakban az  $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$  összeg értékét!  
c) Adjunk képletet  $cos(nx)$ -re  $cos(x)$  és  $sin(x)$  függvényében!
- Adjuk meg  $C \rightarrow C$  függvényként ( a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációkat!  
a) origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás!  
b)  $1 + i$  körüli  $60^\circ$ -os forgatás!  
c) Az  $x$  illetve az  $y$  tengelyre való tükrözés!  
d) Az origón és a  $2i + 1$  ponton átmenő tengelyre való tükrözés.
- Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám  $z_1$  és  $z_2$  alkotják!
- Legyen  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  az  $n$ -edik egységgyökök halmaza adott  $n \geq 1$ -re. Számítsuk ki:  
a)  $\sum_{i=1}^n \epsilon_i$   
b)  $\prod_{i=1}^n \epsilon_i$   
c)  $\sum_{i=1}^n \epsilon_i^k$ , ahol  $k \in N$
- Tegyük fel, hogy két egységgyök összege egységnyi hosszúságú! a) Milyen szöget zárnak be egymással?  
b) Mutassuk meg, hogy az összeg is egységgyök!

12. Osszuk el maradékosan az  $x^5 - 2x^2 + 4$  polinomot

- a)  $x + 1$ -gyel
- b)  $(x + 1)^2$ -nel
- c)  $(x^2 - 1)$ -gyel!

13. Határozzuk meg az a)  $x^3 - x^2 - 8x + 12$

b)  $x^3 + 6x^2 + 21x + 52$

polinomok gyökeit

a Cardano formula segítségével!

14.a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  egészegyütthatós polinomnak egy  $p/q$  racionális szám gyöke, ahol  $p, q \in \mathbb{Z}$  és  $\text{lnko}(p, q) = 1$ , akkor  $p|a_0$  és  $q|a_n$ .

b) Az a) pontot használva határozzuk meg a 13. feladatbeli polinomok egész gyökeit, és Horner séma segítségével bontsuk szorzattá őket!