

## Lineáris algebra

### 3. Feladatsor

- Lássuk be, hogy  $(x - \alpha)^k$  pontosan akkor osztója a  $p(x)$  polinomnak, ha  $p^{(j)}(\alpha) = 0$   $j = 0, \dots, k - 1$ -re!
- Bizonyítsuk be a Schönemann-Eisenstein-féle irreducibilitási kritériumot!
- Keressük meg az alábbi polinomok összes gyökeit! Bontsuk fel a polinomokat irreducibilis polinomok szorzatára  $C[x]$ -ben,  $R[x]$ -ben és  $Q[x]$ -ben!
  - $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$
  - $x^5 + 1$ .
- Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényező alakját!
  - $x^3 - 1$
  - $x^2 + x + 1$
  - $x^n - 1$
  - $x^n + 1$
  - $x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + x^2 - x + 1$
- Mit ad maradékkul a  $3x^{21} - 2x^{14} + 5x^9 - 7$  polinom  $(x - i)$ -vel,  $(x + i)$ -vel,  $x^2 + 1$ -gyel illetve  $(x - 1)^3$ -el osztva?
- Mutassuk meg, hogy egy valós együtthatós  $p(x)$  polinomnak egy  $a \in C \setminus R$  gyök és konjugáltja is ugyanannyiszoros gyöke!
- Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfőegyütthatós
  - komplex együtthatós
  - valós együtthatóspolinomot, melynek  $i$  kétszeres 1 háromszoros gyöke!
- Azt mondjuk, hogy egy  $\epsilon$  egységgyök **rendje**  $n$ , ha  $\epsilon^n = 1$  és  $n$  a legkisebb ilyen természetes szám. Ezt a tényt  $o(\epsilon) = n$ -nel jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy
  - Ha  $o(\epsilon) = n$ , akkor  $o(\epsilon^k) = n / \text{lnko}(n, k)$ .
  - Határozzuk meg a primitív  $n$ -edik egységgyökök számát!
  - Mutassuk meg, hogy ha  $(k, l) = 1$ , akkor egy primitív  $k$ -edik és egy primitív  $l$ -edik egységgyök szorzata primitív  $kl$ -edik egységgyök!
- Bizonyítsuk be, hogy az  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$  polinom irreducibilis a racionális számtest felett és gyökei éppen a primitív  $p$ -edik egységgyökök!
- Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú  $p(x)$  polinomot, amelyre  $p(x_k) = y_k$   $k = 1, 2, 3, 4$ -re!

$x_k$	-1	0	1	2
$y_k$	-10	-5	0	5
- Bontsa fel a polinomot gyöktényező szorzatára.
  - Számítsa ki a gyökök összegét és szorzatát!
- Bizonyítsuk be, hogy ha  $F$  véges test, akkor minden  $f : F \rightarrow F$  függvény polinommal adható meg!

12. Határozzuk meg  $x^n - 1$  és  $x^k - 1$  közös gyökeit! Mutassuk meg, hogy az ezekhez tartozó gyöktényező szorzata  $x^d - 1$ , ahol  $d = (n, k)$ !

13. Határozzunk meg egy olyan polinomot, amely a  $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  és az  $q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$  polinomoknak közös osztója, és minden közös osztójuknak polinomszorosa!