

Lineáris algebra

4. Feladatsor

1. Határozzunk meg egy olyan polinomot, amely a $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és az $q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ polinomoknak közös osztója, és minden közös osztójuknak polinomszorosa!

2. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = (-1, -2, -3), C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, ha lehet:

$$A + A, A + B, AB, AC, AC + 2C, AD - 3\overline{D}, D^2, DD^T, \overline{D} \cdot \overline{D}^T, BC, CB.$$

3. Tetszőleges $n > 1$ -re adjunk meg olyan $n \times n$ -es A, B valós mátrixokat, melyekre $AB = 0$, de $BA \neq 0$!

4. Keressünk olyan $n \times n$ -es A, B, C valós mátrixokat, melyekre:

a) van olyan k természetes szám, hogy $A^k = E$, de $A \notin \{E, -E\}$;

b) van olyan k természetes szám, hogy $B^k = 0$, de $B \neq 0$;

c) $C^2 = C$, de $C \neq 0$ és $C \neq E$.

5. Legyenek A és B tetszőleges $n \times n$ -es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege 0!

6. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát és inverzét:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 2i+2 & 2i-3 & i \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Lássuk be, hogy egy egész elemű mátrix inverze pontosan akkor egész elemű, ha a mátrix determinánsa $+1$ vagy -1 .

8. Adjuk meg a következő egyenletrendszerek összes megoldását:

$$\begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \quad x + y + z = 4 \quad 7x + 14y - 21z = 7 \\ \text{a) } 3x - y + 2z = 7 \quad \text{b) } -x + y - z = 2 \quad \text{c) } x + 2y - 3z = 1 \\ \quad x - z = -2 \quad \text{b) } 2x + y + 2z = 1 \quad \text{c) } 5x + 10y + 15z = 5 \\ \quad 2x + y + z = 7 \quad 4x + 4y + 4z = 1 \quad 3x + 6y - 9z = 3 \end{array}$$

9. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y - z = -3 \\ x - y + 2z = a \\ x + by + z = 3 \end{array}$$

10. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer! Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül:

a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrendszernek van megoldása.

b) Ha $k > n$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

c) Ha $k < n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása is van.

d) Ha $k > n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.

e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.

f) Ha bármely $k - 1$ egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.

11. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:

- a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
- b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
- c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
- d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van?

12. n elem sorbarendezésénél mi az inverziók számának lehetséges maximuma?

13. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

- a) 1, 2, 3, 4 b) 2, 4, 3, 1 c) $n, (n - 1), \dots, 1$ d) 1, 3, ..., $(2n - 1), 2, 4, \dots, 2n$

14. Legyen A 5×5 -ös mátrix, amelynek determinánsa $3!$ Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak:

- a) $2A^{-1}$ b) $(2A)^{-1}$ c) $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$