

Lineáris algebra

6. Feladatsor

1. Legyen $\phi : V \rightarrow W$ lineáris leképezés $v_1, \dots, v_n \in V$ tetszőleges vektorok. Mely állítások következnek valamelyik másiktól (esetleg több másiktól)?

a) ϕ injektív b) ϕ szürjektív

c) v_1, \dots, v_n generátorrendszer V -ben d) $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ generátorrendszer W -ben

e) v_1, \dots, v_n lineárisan független V -ben f) $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ lineárisan független W -ben

g) van olyan bázis, melynek képe lineárisan független W -ben

Változik-e a következtetések rendszere, ha föltesszük, hogy $\dim V = \dim W$ véges szám.

2. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisokban!

Határozzuk meg a magterüket és a képterüket és azok dimenzióját!

a) a sík α szögű elforgatása az origó körül (a bázis mindkét térben (i) $\{(1, 0), (0, 1)\}$; (ii) $\{(1, 0), (\cos(\alpha), \sin(\alpha))\}$;

b) a legfeljebb n -edfokú valós polinomok terén a deriválás mátrixa (a bázis mindkét térben $1, x, x^2, \dots, x^n$)

c) $R^3 \rightarrow R^3$ $(a, b, c) \rightarrow (a + b, 2a - c)$ (a standard bázisokkal)

d) a sík helyvektorainak tükrözése egy origón átmenő α irányszögű egyenesre (a standard bázisban)!

3. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban!

Adjuk meg a leképezés sajátértékeit és sajátvektorait, sajátaltereit; magterét és képterét és ezek dimenzióját!

a) R^3 pontjainak z tengely körüli elforgatása α szöggel.

b) R^3 pontjainak xy síkra való tükrözése.

c) R^3 pontjainak xy síkra való vetítése.

d) R^3 pontjainak z tengely irányú 3-szoros nyújtása!

e) R^3 pontjainak z tengelyre való tükrözése.

f) R^3 pontjainak z tengelyre való vetítése.

4. Az előző feladatot módosítsuk úgy, hogy a forgatás, tükrözés, vetítés tengelye, illetve síkja általános helyzetű, de továbbra is 0-n átmenő legyen!

5. Adjuk meg a vektoriális szorzás, mint lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban! Mi a magtere, képtere és sajátvektorai!

6.a) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az R^3 standard bázisát v_1, v_2, v_3 vektorokba viszi!

Írjuk fel mátrixát a standard bázisban!

b) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az R^3 w_1, w_2, w_3 vektorait v_1, v_2, v_3 vektorokba viszi!

Írjuk fel mátrixát a standard bázisban!

7. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$