

## Lineáris algebra

### 7. Feladatsor

1. Legyen  $V$   $GF(p)$  feletti  $n$  dimenziós vektortér!

- Hány 1-dimenziós altere van  $V$ -nek?
- Hány  $n - 1$ -dimenziós altere van  $V$ -nek?
- Hány  $k$ -dimenziós altere van  $V$ -nek?

2. Hány darab  $n \times n$ -es  $GF(p)$ -feletti reguláris mátrix van összesen?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha  $W_1, W_2$  a  $V$  véges dimenziós vektortér két altere, akkor  $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ !

4. Azt mondjuk, hogy egy  $A \in M_n[R]$  mátrix **ortogonális**, ha  $A^{-1} = A^T$ . Egy  $R^n$ -beli vektorrendszer **ortonormált**, ha minden vektornak önmagával vett skaláris szorzata 1, a többi vektorral pedig skaláris szorzata 0.

Bizonyítsuk be, hogy egy  $A$  mátrix pontosan akkor ortogonális, ha oszlopvektorai ortonormáltak! Bizonyítsuk be, hogy sorokra is hasonló állítás igaz!

5. Legyen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Határozza meg az  $A$  mátrix és az  $[A|b]$  kibővített mátrix rangját  $GF(2)$ ,  $GF(3)$  és  $R$  felett! Mit mondhatunk az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer megoldhatóságáról mindhárom esetben!

6. Számítsuk ki az  $f : (x, y, z) \rightarrow (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$  leképezés mátrixának rangját! Hány dimenziós  $f$  magtér és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!

8. Hány dimenziós alteret generálnak az alábbi vektorrendszerek?

Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát, illetve válasszuk ki ennek az altérnek egy bázisát a megadott generáló elemek közül!

- $[1, 1, -1, 0], [2, 1, 0, 1], [3, 2, -1, 1]$ ;
- $[1, 3, 2, 1], [0, 1, -1, 4], [1, 1, 1, 1], [-2, 1, 2, 1]$ ;
- $[1, 2, 1], [2, 3, 1], [-1, -2, 1], [0, -1, 3], [1, 1, 1]$ ;
- $[1, 1, 0, \dots, 0], [0, 1, 1, 0, \dots, 0], \dots, [0, 0, \dots, 1, 1], [1, 0, \dots, 0, 1]$ ;
- a valós polinomok vektorterében  $\{p(x) \mid \deg p \leq 5, p(1) = 0, p(0) = p'(0)\}$ ;

9. Adjuk meg a mátrixát a következő lineáris leképezéseknek a megadott bázisban (vagy bázispárban)!

Adjuk meg a képtér és a magtér egy-egy bázisát!

a)  $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y + z)$  standard bázisban, illetve a  $B'_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$  és  $B'_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$  bázispárban!

b) az  $x = t, y = 2t, z = -t$  tengely körüli  $90^\circ$ -os forgatás a standard bázisban!

c) a  $3 \times 3$ -as valós mátrixokon az  $A \rightarrow A + A^T$  leképezés a standard bázisban!

10. Keressük meg a sajátértékeket és a sajátvektorokat, valamint a sajátaltèreket! Adjunk meg a sajátvektorokból álló bázist, ha van ilyen! Adjuk meg a leképezések(mátrixaik) karakterisztikus polinomját!

a)  $f$  az  $x - 2y + z$  síkra való merőleges vetítés;

b)  $f$  mátrixa a standard bázisban:

$$\text{b1) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b2) } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b3) } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$