Logika Gyakorló Feladatok

1. Formalizáljuk az $\mathcal{A}$ struktúra nyelvén:

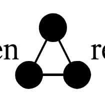
$\mathcal{A}$ = (N, +, f,g; <, =)   (f,g: egyváltozós függvény).

1. f monoton növő;
2. f korlátos;
3. f periodikus;
4. f konstans;
5. f kvázikonstans;
6. f értékkészlete 2 elemű;
7. f injektív;
8. g szürjektív;
9. f és g azonos függvények;
10. Majdnem minden n-re (azaz véges sok kivétellel minden n-re) f(n) < g(n);
11. g-nek van fixpontja;
12. g minden fixpontja f-nek is fixpontja.

2. Formalizáljuk alkalmas elsőrendű nyelven:

1. Minden cukrász tud csokifagyit csinálni;
2. Ha egy cukrász eperfagyit tud csinálni, akkor csokifagyit is tud csinálni;
3. Két cukrász közül legalább az egyik tud eperfagyit csinálni;
4. Azok a cukrászok, akik nem tudnak eperfagyit csinálni, vagy csokifagyit, vagy vaniliafagyit tudnak csinálni.
5. Van olyan ember, aki nem cukrász, de mégis mindent meg tud csinálni, amit egy cukrász.
6. Van olyan agár, aki minden vizslánál gyorsabb.
7. Ha egy agár drágább egy vizslánál, akkor gyorsabb is nála.
8. A vizslák jobb házörzők, mint az agarak.
9. Aladár szerint a vizslák jobb házörzők, mint az agarak

Formalizáljuk a következő gráftulajdonságokat:

- G-ben nincs él,
- G-ben pont egy él van,
- G-ben nincs háromszög (azaz ilyen  rész),
- G-nek legfeljebb 4 csúcsa van.

3. Az (A, ≤,=) részbenrendezett halmaz nyelvén formalizáljuk:
   - van legnagyobb elem,
   - nincs legkisebb elem,
   - ninden elemre igaz, hogy a nála nagyobbak közt van legkisebb,
   - bármely 2 elemnek van felső korlátja,
   - bármely 2 elemnek van legnagyobb alsó korlátja.

4. Adjuk meg a következő formulák egy-egy modelljét:
   a. $\forall x \exists y \exists z\, (R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$;
   b. $\forall x \forall y\, (x \neq y \Rightarrow \exists z\, (R(x,z) \wedge \neg R(y,z)))$;
   c. $\forall x\, (\exists y\, R(x,y) \Rightarrow P(x))$;

d. $\forall x\forall y\forall z\,(P(x,y,z) \Rightarrow P(y,z,x)) \wedge \exists x\exists y\exists z\,\neg P(x,y,z)$;
e. $\exists x\forall y\,(f(x,y) = g(y))$;
f. $\forall x\exists y f(x,y) = g(g(y))$.

5. Hozzuk prenex alakra:
g. $\forall x(\exists z P(z) \Rightarrow \exists z Q(x,z))$;
h. $\forall x P(x) \Rightarrow (\exists x P(x) \vee \forall y Q(y)) \Rightarrow \exists x\, P(x)$;
i. $\forall x\forall y\, P(x,y) \Rightarrow \neg\forall y\exists z\, Q(y,z)$;
j. $\neg\forall x(\neg\forall y P(y) \Rightarrow \neg\exists z S(f(x),f(z)))$;
k. $\forall x(\exists y P(x,y) \vee \neg(\exists y\forall z Q(x,y,z) \vee \exists u P(x,u)))$.

6. Alkalmas modell megadásával igazoljuk, hogy Σ-nak nem következménye φ.
- $\Sigma = \{\forall x\forall y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)),\ \ \forall x\forall y\forall z(R(x,y)\wedge R(y,z)\Rightarrow R(x,z))\}$, $\varphi = \forall x R(x,x)$;
- Σ mint előbb, $\varphi = \forall x\exists y\, R(x,y)$;
- $\Sigma = \{\forall x(\exists y P(x,y) \Rightarrow Q(x)), \exists x\exists y\, P(x,y)\}$, $\varphi = \forall x Q(x)$;
- $\Sigma = \{\forall x(f(f(x)) = x)\}$, $\varphi = \exists x\,(x = f(x))$.

7. A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk az alábbiakat (egyes kérdéseknek semi köze a teljességi tételhez, mások viszont triviálisan következnek a teljességi tételből).
- Ha Σ formulahalmaz, akkor legyen $\mathrm{cons}(\Sigma) = \{\varphi: \Sigma \models \varphi\}$. Mutassuk meg, hogy $\Sigma \subseteq \mathrm{cons}(\Sigma)$, ha $\Gamma\subseteq\Sigma$ akkor $\mathrm{cons}(\Gamma) \subseteq \mathrm{cons}(\Sigma)$ és $\mathrm{cons}(\mathrm{cons}(\Sigma)) = \mathrm{cons}(\Sigma)$;
- Σ akkor és csak akkor teljes, ha bármely két modelljében pontosan ugyanazok a formulák igazak;
- Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}$ véges univerzumú, véges nyelvű struktúrák, melyekben pont ugyanazok az elsőrendű formulák igazak, akkor $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}$ izomorfak is;
- Igazoljuk: Ha $\Sigma \vdash \alpha\Rightarrow\beta$ és $\Sigma \vdash \alpha\Rightarrow\neg\beta$, akkor $\Sigma \vdash \neg\alpha$;
- Igazoljuk a teljességi tétel felhasználásával: Ha $\mathrm{ded}(\Sigma)$ teljes, akkor Σ is az.

Jó munkát !! Telefonos segítség: +361-340-4029.