Logika ZH

2006 Április 4.

Logika Csoport ZH
2006 Április 4, 1. csoport.

1. Legyenek

$$\Sigma = \{B \wedge \neg C \Rightarrow A, \quad \neg A \Rightarrow C \Rightarrow B\} \text{ és}$$
$$\varphi = A \vee (B \Rightarrow C).$$

Az igazságtáblák elkészítésével döntsük el, hogy $\Sigma \models \varphi$ fennáll-e. (8 pont.)

2 (a). Legyenek f és g egyváltozós függvényszimbólumok. Formalizáljuk az $\langle f, g; =\rangle$ elsőrendű nyelven, hogy f és g értékkészlete különböző.

2 (b). Alkalmas elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi két mondatot:
„Ha egy autó gyorsabb egy másiknál, akkor drágább is nála.”
„Van olyan autó, amely minden trabantnál gyorsabb.” (12 pont.)

3. Alkalmas modell megadásával igazoljuk, hogy

$$\{\forall x \exists y E(x, y)\} \not\models \exists x \exists y \exists z (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z)).$$

(12 pont.)

4. Legyen $\mathcal{A} = \langle \mathbf{N}, f, g, =\rangle$ ahol $\mathbf{N}$ a természetes számok halmaza, $f(u, v) = 2u + v$ kétváltozós függvény és $g(z) = z + 4$ egyváltozós függvény. Állapítsuk meg, hogy $\mathcal{A} \models \exists x \forall y (g(y) = f(x, y))$ fennáll-e. (12 pont.)

5. Legyen $f : \{i, h\}^3 \to \{i, h\}$ az a függvény, melyre $f(h, i, i) = f(h, h, i) = f(h, i, h) = i$, és másütt f értéke hamis. Adjunk meg egy f-t leíró DNF-t és KNF-t, majd McCluskey algoritmusával egyszerűsítsük mindkettőt. (8 pont.)

6. Soroljuk fel a prímkomponenseket, és hozzuk prenex-normálformára:

$$\forall x R(x, y) \vee \exists z \neg P(z) \Rightarrow \exists x R(x, x).$$

(8 pont.)

Minden választ indokoljunk !

Logika Csoport ZH
2006 Április 4, 2. csoport.

1. Legyenek

$$\Sigma = \{A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow \neg C), \quad B \Rightarrow A \vee C\} \text{ és}$$
$$\varphi = \neg C \Rightarrow \neg B.$$

Az igazságtáblák elkészítésével döntsük el, hogy $\Sigma \models \varphi$ fennáll-e. (8 pont.)

2 (a). Legyen f egyváltozós függvényszimbólum. Formalizáljuk az $\langle f; =\rangle$ elsőrendű nyelven, hogy f minden értékét legalább kétszer veszi fel (azaz, ha y benne van f értékkészletében, akkor legalább két olyan x_1, x_2 van, melyre $y = f(x_1) = f(x_2)$).

2 (b). Alkalmas elsőrendű nyelven formalizáljuk az alábbi két mondatot:

,,Ha egy mobiltelefont vezetékes telefonról fel lehet hívni, akkor azt mobiltelefonról is fel lehet hívni."

,,Van olyan mobiltelefon, melyről minden vezetékes telefont fel lehet hívni."

(12 pont.)

3. Alkalmas modell megadásával igazoljuk, hogy

$$\{\ \forall x \exists y \exists z (E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge y \neq z)\ \} \ \not\models\ \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow E(x,y)).$$

(12 pont.)

4. Legyen $\mathcal{A} = \langle \mathbf{Z}, f, g, =\rangle$ ahol $\mathbf{Z}$ az egész számok halmaza, $f(u,v) = uv$ kétváltozós függvény és $g(z) = z^2$ egyváltozós függvény. Állapítsuk meg, hogy fennáll-e

$$\mathcal{A}\ \models\ \forall x \exists y (g(x) = f(x,y)).$$

(12 pont.)

5. Legyen $f : \{i,h\}^3 \to \{i,h\}$ az a függvény, melyre $f(i,h,i) = f(i,h,h) = f(h,h,h) = i$, és másütt f értéke hamis. Adjunk meg egy f-t leíró DNF-t és KNF-t, majd McCluskey algoritmusával egyszerűsítsük mindkettőt. (8 pont.)

6. Soroljuk fel a prímkomponenseket, és hozzuk prenex-normálformára:

$$\exists y \neg Q(y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow Q(c).$$

(8 pont.)

Minden választ indokoljunk !