

**Matematika M1 1. pótZH     BME, 2016 Május 18.**

1. A  $G$  gráf csúcsai az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmaz 3-elemű részhalmazai; az  $a \neq b$  csúcsok között pontosan akkor van él, ha  $a \cap b \neq \emptyset$ . Igazoljuk, hogy  $G$  izomorf  $K_{10}$ -el.  
(10 pont)

2. A legalább 3 csúcsú  $G$  gráfra teljesül, hogy tetszőleges csúcsát elhagyva a maradék gráfban van Euler-kör. Igazoljuk, hogy van olyan páros  $n$  szám, melyre  $K_n$  és  $G$  izomorfak.  
(10 pont)

3. Legyen  $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ . A  $G$  gráf csúcsai az  $A \times A$  halmaz elemei; az  $\langle a, b \rangle$  és  $\langle c, d \rangle$  csúcsok között él van, ha  $a - c$  nem osztható 3-al, és  $b \neq d$ . Van-e  $G$ -ben Hamilton-kör?  
(10 pont)

4. A  $[0, 1]$  valós intervallumban egyenletes eloszlás szerint véletlenül választunk két számot,  $\xi$ -t és  $\eta$ -t. Legyen az  $A$  esemény az, hogy  $\xi + \eta \leq \frac{1}{2}$ , a  $B$  esemény pedig az, hogy  $\xi \leq \frac{1}{4}$ . Független-e  $A$  és  $B$ ?  
(10 pont)

5. Visszatevés nélkül kiválasztunk 5 számot az  $\{1, 2, \dots, 90\}$  halmazból. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott számok közül pontosan  $k$  olyan lesz, mely osztható 3-al,  $n$  olyan lesz, mely 3-al osztva 1-et ad maradékul, és  $m$  olyan lesz, mely 3-al osztva 2-t ad maradékul.  
(10 pont)

6. Egy folyamatosan üzemelő autóbusz útvonala kör alakú. Minden megállóban (egymástól függetlenül)  $p$  valószínűséggel száll fel ellenőr. Jelölje  $\xi$  azt, hogy az autóbusz hányadik megállása során száll fel az első ellenőr. Számítsuk ki  $\xi$  várható értékét.  
(10 pont)

---

Minden választ indokoljunk !