Régebbi Matek B2 és B3 zh-k

**Taylor-Sorokkal, Fourier-Sorokkal,
komplex függvények értelmezésév, deriválhatóságával, integráljaival és
térgörbékkel kapcsolatos feladatai.**

1. Határozzuk meg $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+4}}{2^n(4n+4)}\right)$ konvergencia-halmazát és összegfüggvényét.

(2006 december 13)

2. Határozzuk meg a konvergencia középpontját és sugarát: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)(z-i)^n$.

(2006 december 13)

3. Ebben a feladatban x valós változó.

(a) Határozzuk meg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n(x)}{\sqrt{n}}$ konvergencia-halmazát.

(b) Határozzuk meg $\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$ konvergencia-halmazát és összegfüggvényét.

(2006 október 25)

4. Ebben a feladatban z komplex változó.

(a) Határozzuk meg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}(z-i)^n$ konvergencia-középpontját és konvergencia-sugarát.

(b) Határozzuk meg $f(z)=z^2e^{3z}$ Taylor-sorát a 0 körül.

(2006 október 25)

5. Határozzuk meg a következő hatványsor összegfüggvényét és konvergenciahalmazát:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3nx^{3n-1}.$$

(2007 december 11)

6. Legyen f az a 2π szerint periodikus valós függvény, melyre teljesül, hogy

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha } x \in (-\pi, 0), \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ 2 & \text{ha } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Adjuk meg f Fourier-sorát. (2007 január 5)

7. Legyen f az a 2π szerint periodikus valós függvény, melyre teljesül, hogy minden $x \in (-\pi, \pi]$-re $f(x) = sh(x)$. Adjuk meg f Fourier-sorát. (2006 december 13)

8. Legyen f az a 2π szerint periodikus valós függvény, melyre teljesül, hogy minden $x \in (-\pi, \pi]$-re $f(x) = x$. Adjuk meg f Fourier-sorát. (2006 október 25)

9. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ az a 2π szerint periodikus függvény, melyre teljesül, hogy

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{ha } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Számítsuk ki f Fourier-sorában $cos(3x)$ együtthatóját.

(2007 december 11)

10. Legyen $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. Adjuk meg algebrai alakban $(ln(z))^{1/3}$-t.

(2006 december 13)

11. Adjuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre teljesül, hogy

$$e^{2iz} - 6e^{iz} = -18.$$

(2006 október 25)

12. Legyen $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

(a) Adjuk meg azt a reguláris komplex f függvényt, melyre

$f = u + i \cdot v$ és $f(i) = 1$.

(b) Adjuk meg f'-t is. (2006 október 25)

13. (a) Igazoljuk, hogy az $f(x+iy) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ komplex függvény értelmezési tartományának minden pontjában deriválható.

(b) Adjuk meg azt az $f = u+iv$ reguláris komplex függvényt, melyre $u(x, y) = 2x$ és $f(2) = 4 + i$ (2006 december 13)

14. Számítsuk ki: $\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz,$ a görbe irányítása pozitív.

(2006 december 21)

15. Számítsuk ki (a görbe irányítása pozitív):

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{(z-3)(z-i)^2}\, dz.$$

(2007 január 5)

16. Számítsuk ki (a görbe irányítása pozitív):

$$\int_{|z|=1} \frac{sin(z)}{z(z-\pi/4)^2} dz$$

(2006 december 13)

17. Számítsuk ki a következő komplex integrált (a görbe irányítása pozitív):

$$\int_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{e^z}{z^2+1} dz.$$

(2007 december 11)

18. Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben az $r(t) = [t, t^2, t^4]$ görbe simulósíkja merőleges a $[0, 1, 6]$ vektorra. Az ilyen pont(ok)ban írjuk fel a görbe érintőegyenesének egyenletét is.

(2007 május 18)

19. Legyen $r : [0, \infty) \to \mathbf{R}^3$, $r(t) = \dfrac{t^3}{3}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{3}t^2}{2}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$. Számítsuk ki r ívhosszát a $t_0 = 0$ és $t_1 = 1$ paraméterek között.

(2007 május 11)

20. Legyen $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ a következő térgörbe: $r(t) = \dfrac{t^3}{3}\mathbf{i} + \dfrac{2\sqrt{t^9}}{9}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Térjünk át ívhossz-paraméterre (a $t_0 = 0$ pontból kiindulva).

(2007 május 24)