A MATEMATIKA ALAPJAI

1. logika blokk

2. előadás

0.1. A 0-rendű logika szemantikája

0.1. definíció (interpretáció, kiértékelés). *A $k : \{\text{ítéletváltozók}\} \to \{i, h\}$ függvényt interpretációnak vagy változókiértékelésnek nevezzük.*

0.1.1. A logikai műveletek jelentése

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

0.1.2. Formulák jelentése

0.2. definíció (Az igazság definíciója). *Legyen k egy értékelés φ pedig egy 0-rendű formula. Jelölje $k \models \varphi$ azt, hogy φ igaz k-ban (k értékelés mellett.)*

$$k \models \varphi, \ \text{ha} \begin{cases} k(\varphi) = i, & \varphi \text{ ítéletvéltozó} \\ k \not\models \psi, & \varphi = \neg\psi \\ k \models \psi_1 \text{ és } k \models \psi_2, & \varphi = \psi_1 \wedge \psi_2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

A kipontozott részek a 2.1.1-ben lévő táblázat szerint folytatódnak.

0.1. megjegyzés. *Összetett formula jelentése (igazsága) kiszámolható a részei jelentéséből (igazságából).*

0.2. Az 1-rendű formulák szemantikája

0.3. definíció (1-rendű struktúra). *$\mathcal{A} = (A, f_i^{\mathcal{A}}, R_j^{\mathcal{A}}, C_k^{\mathcal{A}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$, ahol A nemüres alaphalmaz és minden $i \in I$, $j \in J$ és $k \in K$-ra: $f_i^{\rho(i)} : A \to A$ egy $\rho(i)$-változós függvény, $R_j \subseteq A^{\delta(j)}$ egy $\delta(j)$-változós reláció, valamint $C_k^{\mathcal{A}} \in A$ egy konstans. I, J, K tetszőleges halmaz. Egy struktúra típusát (I, J, K, ρ, δ)-val adjuk meg.*

0.1. példda.
1. *Minden csoport (gyűrű, háló) struktúra.*
2. *Minden részbenrendezett halmaz struktúra.*
3. *Minden gráf struktúra.*
4. *$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, =, \leqslant, 0, 1)$ egy struktúra.*

0.4. definíció. *Legyen L egy 1-rendű nyelv. Az $\mathcal{A}$ struktúra az L nyelv egy modellje, ha $\mathcal{A}$ és L típusa azonos.*

0.5. definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ az L nyelv modellje. Egy $k : \{\text{változók}\} \to \mathcal{A}$ függvényt az $\mathcal{A}$ feletti (ki)értékelésnek nevezzük.*

0.6. definíció (Termek jelentése). *Legyen k egy $\mathcal{A}$ feletti értékelés és t egy term. Ekkor t jelentése $\mathcal{A}$-ban k értékelés mellett*

$$t^{\mathcal{A}}[k] := \begin{cases} k(t), & \text{ha } t \text{ változó} \\ c^{\mathcal{A}}, & \text{ha } t = c \text{ konstans} \\ f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[k], t_2^{\mathcal{A}}[k], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[k]), & \text{ha } t = f(t_1, t_2, \dots, t_n) \end{cases}$$

0.7. definíció. *Legyenek k, k' értékelések, x pedig egy változó. Azt mondjuk, hogy k és k' x-közel vannak egymáshoz (és azt írjuk, hogy $k \stackrel{x}{\equiv} k'$), ha minden y-ra: $x \neq y \Rightarrow k(y) = k'(y)$.*

0.8. definíció. *Legyen φ egy formula, $\mathcal{A}$ struktúra, k pedig egy $\mathcal{A}$ feletti értékelés. Azt mondjuk, hogy φ igaz $\mathcal{A}$-ban k értékelés mellett, akkor és csak akkor:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[k] = \begin{cases} t_1^{\mathcal{A}}[k] = t_2^{\mathcal{A}}[k], & \text{ha } \varphi = \text{"}t_1 = t_2\text{"} \\ (t_1^{\mathcal{A}}[k], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[k]) \in R^{\mathcal{A}}, & \text{ha } \varphi = \text{"}R(t_1, \dots, t_2)\text{"} \\ \text{Mint 0-rendben}, & \text{ha } \varphi = \text{"}\neg\psi\text{"}, \varphi = \text{"}\psi_1 \vee \psi_2\text{"}, \text{ stb.} \\ \text{Létezik olyan } k \stackrel{x}{\equiv} k', \text{ melyre } \mathcal{A} \models \psi[k'], & \text{ha } \varphi = \text{"}\exists x \psi\text{"}, \\ \text{Minden } k' \stackrel{x}{\equiv} k\text{-ra } \mathcal{A} \models \psi[k'], & \text{ha } \varphi = \text{"}\forall x \psi.\text{"} \end{cases}$$

0.9. definíció. *$\mathcal{A} \models \varphi$, ha minden $\mathcal{A}$ feletti k értékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[k]$.*

0.10. definíció. *Legyen K struktúraosztály, Σ pedig formulahalmaz. $K \models \Sigma \Leftrightarrow (\forall \mathcal{A} \in K)(\forall \varphi \in \Sigma)(\mathcal{A} \models \varphi)$.*

0.11. definíció. *Legyen Σ 0- vagy 1-rendű formulahalmaz φ formula a megfelelő rendben. Azt mondjuk, hogy Σ-ból következik φ és azt írjuk, hogy $\Sigma \models \varphi$, ha*

- *0-rendben: minden k értékelésre, ha $k \models \Sigma$ (Σ összes eleme igaz k mellett), akkor $k \models \varphi$,*
- *1-rendben: minden $\mathcal{A}$ struktúrára, ha $\mathcal{A} \models \Sigma$, akkor $\mathcal{A} \models \varphi$.*

0.2. példa.

- *$\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ racionális és komplex számok gyűrűje mellett legyen $\varphi = \exists x(x \cdot x = -1)$, ekkor $\mathbb{Q} \not\models \varphi$, viszont $\mathbb{C} \models \varphi$.*
- *Ha megadunk egy olyan k értékelést, amire $k(x) = 5$, akkor a $\mathbb{Q} \models (x = 5)[k]$ igaz lesz, viszont egy másik l értékelés mellett, amire x változóhoz 0-át rendelünk, azaz $l(x) = 0$, már $\mathbb{Q} \not\models (x = 5)[l]$ adódik.*

Ajánlott irodalom

- Hajnal-Hamburger: Halmazelmélet
- Csirmaz László: Matematikai logika (angolul: `http://eprints.renyi.hu/55/`, magyarul: `http://eprints.renyi.hu/12/`)
- Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda: A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása
- Ferenczi Miklós: Matematikai logika (`http://www.math.bme.hu/~ferenczi/LOGIKA.pdf`)