A MATEMATIKA ALAPJAI

3. előadás

0.1. definíció (Erősorrend)**.** *Ami előrébb van a listán, az köt erősebben:*

$$\frac{\forall}{\exists}, \neg, \frac{\vee}{\wedge}, \Rightarrow, \Leftrightarrow .$$

Például $\exists x\varphi \wedge \psi$ azt jelenti, hogy $(\exists x\varphi) \wedge \psi$. Az implikációs láncokat mindig jobbra zárójelezzük: $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \rho$ azt jelenti, hogy $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \rho)$.

0.0.1. Műveletek kapcsolatai

0.2. definíció. *Az $f : \{i, h\}^n \to \{i, h\}$ alakú függvényeket logikai műveleteknek nevezzük. (Az n változós logikai műveletek száma: 2^{2^n})*

0.3. definíció. *Logikai műveletek egy F halmaza funkcionálisan teljes, ha F segítségével az összes $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ logikai függvény előállítható.*

0.1. tétel. *Az $\{\neg, \wedge, \vee\}$ művelethalmaz funkcionálisan teljes.*

Most megadunk egy f logikai függvényt (műveletet) igazságtáblázatával.

x	y	z	$f(x, y, z)$
h	h	h	h
h	h	i	i
h	i	h	i
h	i	i	h
i	h	h	h
i	h	i	h
i	i	h	h
i	i	i	i

Tekintsük a következő formulákat:

- $\varphi_2 = \neg x \wedge \neg y \wedge z$
- $\varphi_3 = \neg x \wedge y \wedge \neg z$
- $\varphi_8 = x \wedge y \wedge z$

Az egyes formulák csak az indexükben jelzett sorhoz tartozó bemenetre vesznek fel igaz értéket, tehát $\varphi = \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \varphi_8$ megvalósítja f-et.

Következzen a 3.1 tétel bizonyítása.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $f : \{i, h\}^n \to \{i, h\}$ tetszőleges, ha $\underline{s} \in \{i, h\}^n$, akkor legyen:

$$x_j^{(\underline{s})} = \begin{cases} x_j, & \text{ha } s_j = i \\ \neg x_j, & \text{ha } s_j = h. \end{cases}$$

Ekkor

$$\varphi = \bigvee_{\forall \underline{s}: f(\underline{s}) = i} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{(\underline{s})} \right),$$

és $f \equiv \varphi$, hiszen $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{(\underline{s})}$ mindig csak az adott $\underline{s}$ mellett igaz (az előző példához hasonlóan). Az f függvény ezen előállítását diszjunktív normálformának nevezzük (rövidítve: DNF).

Mivel a DNF csak a kitüntetett $\{\neg, \vee, \wedge\}$ művelethalmaz logikai függvényeit használja, ezért az valóban funkcionálisan teljes. $\square$

Egy másik bizonyításhoz definiáljuk a konjunktív normálformát (KNF). Legyen

$$x_{j(\underline{s})} = \begin{cases} \neg x_j, & \text{ha } s_j = i \\ x_j, & \text{ha } s_j = h \end{cases},$$

ekkor

$$\psi = \bigwedge_{\forall \underline{s}: f(\underline{s}) = h} \left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{(\underline{s})} \right)$$

az f függvény KNF-es előállítása, ez teljesül, hiszen $\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{(\underline{s})}$ csak a megadott $\underline{s}$ mellett hamis, így $\psi \equiv f$ itt is. A KNF is csak a kitüntetett művelethalmaz elemeit használja. Ezzel befejeztük a másik bizonyítást is. $\square$

0.1. megjegyzés. *$\neg, \wedge, \vee$ logikai áramkörökkel megvalósíthatók. Ha az áramköri elemeknek költsége van és f kevésszer igaz, akkor DNF, ha kevésszer hamis, akkor KNF alkalmazása a célszerű. A minimális (pl.: legkevesebb logikai függvényt tartalmazó) megvalósítás megkeresése NP-teljes probléma.*

0.4. definíció. *Legyenek φ és ψ formulák. Azt írjuk, hogy $\varphi \equiv \psi$, ha minden k értékelésre $k \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $k \models \psi$.*

0.1. példa. $\varphi = \neg\neg\varphi$.

0.1. állítás. *A $\{\neg, \wedge\}$ művelethalmaz funkcionálisan teljes.*

Bizonyítás. Kell, hogy $\varphi \vee \psi$ kifejezhető $\{\neg, \wedge\}$ halmazzal, utána 3.1 tételből következik az állítás. $\varphi \vee \vee \psi \equiv \neg\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Utolsó lépésben egy De Morgan-azonosságot alkalmaztunk. $\square$

0.2. állítás. *$\{\neg, \vee\}$ és $\{\neg, \Rightarrow\}$ is funkcionálisan teljes művelethalmazok.*

Bizonyítás. Első halmaz: ugyanúgy mint előbb. $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Második halmazra: igazságtáblával igazolható, hogy $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \Rightarrow \psi$. $\square$

0.1. mese. *$\{\neg\}$ nem funkcionálisan teljes, mert csak egyváltozós függvények írhatóak le vele. A $\{\vee, \wedge\}$ sem az, igazolható, hogy az ezekkel felírt függvények monoton növőek (ehhez legyen $h < i$), de $\neg$ nem az, ezért az nem fejezhető ki.*

0.5. definíció (Sheffer-féle sem-sem művelet, NAND)**.**

x	y	$x \mid y$
h	h	h
h	i	h
i	i	h
h	h	i

0.3. állítás. *$\{\mid\}$ funkcionálisan teljes.*

Bizonyítás. $\neg x \equiv x \mid x$ és $x \vee y \equiv \neg(x \mid y) \equiv (x \mid y) \mid (x \mid y)$, 3.2. állítás miatt ez is funkcionálisan teljes. $\square$

0.4. állítás. *Legyen φ tetszőleges formula, ekkor van olyan DNF vagy KNF alakú φ', hogy $\varphi \equiv \varphi'$.*

Bizonyítás. Legyen t a φ igazságtáblája 3.1. tétel miatt φ leírható ψ KNF-el vagy DNF-el és nyilván $\varphi \equiv \psi$. □

0.6. definíció (Szabadon előforduló változó)**.** *A v változó előfordulása φ-ben szabad, ha az adott előfordulásban nincs v-re vonatkozó kvantor hatáskörében. A v szabad φ-ben, ha v-nek van szabad előfordulása φ-ben.*

0.2. példa. $\forall x P(x) \Rightarrow R(x,y)$*-ban y szabad előfordulású.* $\forall x \forall y(xy = yx)$ *ebben pedig nincs szabad előfordulású változó.*

0.5. állítás. *Legyen t egy term, k és k' olyan értékelések, hogy t minden v változójára $k(v) = k'(v)$, akkor $t^{\mathcal{A}}[k] = t^{\mathcal{A}}[k']$, azaz t jelentése csak a benne előforduló változóktól függ.*

Bizonyítás. t összetettsége szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha t konstans szimbólum, akkor nyilvánvalóan $t^{\mathcal{A}}[k] = t^{\mathcal{A}}[k']$. Ha t változó, akkor $t^{\mathcal{A}}[k] = k(t) = k'(t) = t^{\mathcal{A}}[k']$. Tegyük fel, hogy $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ és az állítást már tudjuk $t_1, t_2, \ldots, t_n$-re, ekkor $t^{\mathcal{A}}[k] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[k], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[k]) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[k'], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[k']) = t^{\mathcal{A}}[k']$. □

0.2. tétel. *Legyen φ 1.-rendű formula, $\mathcal{A}$ struktúra k pedig egy $\mathcal{A}$ feletti értékelés. $\mathcal{A} \models \varphi[k]$ csak a φ-ben szabadon előforduló változóktól függ, azaz ha k' egy olyan értékelés, hogy minden v szabad változóra φ-ben: $k(v) = k'(v)$, akkor $\mathcal{A} \models \varphi[k]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \models \varphi[k']$.*

Bizonyítás. Ha $\varphi = t_1 = t_2$, akkor $\mathcal{A} \models (t_1 = t_2)[k] \leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[k] = t_2^{\mathcal{A}}[k] \leftrightarrow$ 3.5. állítás miatt $t_1^{\mathcal{A}}[k'] = t_2^{\mathcal{A}}[k'] \leftrightarrow \mathcal{A} \models (t_1 = t_2)[k']$. Ha $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$, akkor $\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[k] \leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[k], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[k]) \in R^{\mathcal{A}} \leftrightarrow \mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[k']$, ismét a 3.5. állítást használva.

Következzen az indukciós lépés: tegyük fel, hogy az állítás igaz φ-re, ψ-re. Elég megmutatni, hogy az állítás igaz marad $\neg\varphi$-re, $\varphi \wedge \psi$-re (3.1. állítás miatt ez így már funkcionálisan teljes) és $\exists v \varphi$-re is. Ha utóbbiak teljesülnek, akkor $\forall v \varphi \equiv \neg\neg\forall v \varphi \equiv \neg(\exists v \neg\varphi)$ miatt $\forall v \varphi$-re is igaz lesz. Tehát mindennel együtt tetszőleges 1.-rendű formulára igaz lesz.

φ-ről $\neg\varphi$-re való áttérés:

$$\mathcal{A} \models \neg\varphi[k] \leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi[k]$$
$$\overset{\text{ind.}}{\leftrightarrow}$$
$$\mathcal{A} \not\models \varphi[k'] \leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi[k'].$$

φ, ψ-ről $\varphi \wedge \psi$-re való áttérés:

$$\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[k] \leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[k] \text{ és } \mathcal{A} \models \psi[k]$$
$$\overset{\text{ind.}}{\leftrightarrow}$$
$$\mathcal{A} \models \varphi[k'] \text{ és } \mathcal{A} \models \psi[k'] \leftrightarrow \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[k'].$$

φ-ről $\exists v \varphi$-re való áttérés: $\mathcal{A} \models \exists v \varphi[k] \leftrightarrow$ van $k^* \overset{v}{\equiv} k$ értékelés, amelyre $\mathcal{A} \models \varphi[k^*]$. Legyen

$$k^{*\prime}(x) = \begin{cases} k'(x), & \text{ha } x \neq v \\ k^*(x) & \text{különben.} \end{cases}$$

A φ szabad változóin k^* és $k^{*\prime}$ értékei megegyeznek, hiszen $k^{*\prime}(v) = k^*(v)$; ha pedig $x \neq v$ a φ egy szabad változója, akkor $k^{*\prime}(x) = k'(x) = k(x) = k^*(x)$. Az indukció miatt $\mathcal{A} \models \varphi[k^*]$ akkor csak akkor, ha $\mathcal{A} \models \varphi[k^{*\prime}]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \models \exists v \varphi[k']$, mert $k' \overset{v}{\equiv} k^{*\prime}$. □