A MATEMATIKA ALAPJAI

4. előadás

0.1. Bizonyításelmélet

0.1. definíció (Az ítéletkalkulus axióma-sémái). *1.* $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

2. $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$

3. $(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow \alpha)$,

ahol α, β, γ formulaváltozók.

0.1. megjegyzés. *A $\{\neg, \Rightarrow\}$ művelethalmaz funkcionálisan teljes és feltesszük, hogy formuláinkban csak ezek fordulnak elő. Mostantól (amíg mást nem mondunk) az ítéletkalkulusban dolgozunk.*

0.2. definíció (Következtetési szabály, Modus Ponens, jel.: `MP`).

$$\frac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

Ez azt jelenti, hogy ha rendelkezésünkre áll $\alpha \Rightarrow \beta$ formula és az α, akkor `MP`*-vel előáll β is.*

0.3. definíció. *Legyen Σ formulahalmaz és φ formula. Azt írjuk, hogy $\Sigma \vdash \varphi$ (és azt mondjuk, hogy Σ-ból levezethető φ), ha van a formuláknak egy olyan véges $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sorozata úgy, hogy $\alpha_n = \varphi$ és minden $i \leqslant n$-re α_i-re teljesül, hogy:*

- *axióma VAGY*
- *eleme a Σ-nak VAGY*
- `MP`*-vel előáll a korábbi α_j-kből.*

0.2. megjegyzés. *Az előző definícióban szereplő $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sorozat φ egy Σ-beli levezetése. Algoritmikusan ellenőrizhető, hogy az adott $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ levezetése-e φ-nek.*

0.1. példa. *$\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \varphi$, ahol φ tetszőleges rögzített formula.*

Bizonyítás.

1.	$(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$	AX2 egy példánya
2.	$\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$	AX1 egy példánya
3.	$(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$	`MP(1,2)`
4.	$\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$	AX1 egy példánya
5.	$\varphi \Rightarrow \varphi$	`MP(3,4)`

$\square$

0.1. tétel (Teljességi-tétel). *$\Sigma \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash \varphi$, azaz minden helyes következtetés formálisan bizonyítható.*

0.3. megjegyzés. *$\Sigma \vdash \varphi$ esetén csak szintaktikus transzformációk kerülnek szóba. Jelentés, igazság fel sem merül.*

0.4. definíció (Lezárási operátor). *Legyen S halmaz és jelölje $\mathcal{P}(S)$ ennek a hatványhalmazát a $cl : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ függvényt lezárási operátornak nevezzük az S halmazon, hogy ha teljesülnek az alábbiak minden $X, Y \subseteq S$ halmazra:*

1. *$X \subseteq cl(X)$ (extenzív)*
2. *$X \subseteq Y \Rightarrow cl(X) \subseteq cl(Y)$ (monoton)*

3. $cl(cl(X)) = cl(X)$ *(idempotens)*

0.5. definíció. $\mathrm{ded}(\Sigma) := \{\varphi : \Sigma \vdash \varphi\}$, *azaz* $\mathrm{ded}(\Sigma)$ *a* Σ*-ból levezethető formulák halmaza.*

0.1. lemma. *A* ded *egy lezárási operátor.*

Bizonyítás. (1) extenzív: Ha $\varphi \in \Sigma$, akkor "φ" levezetése φ-nek Σ-ból, tehát $\Sigma \subseteq \mathrm{ded}(\Sigma)$.

(2) monoton: Ha $\varphi \in \mathrm{ded}(\Sigma)$, akkor létezik $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ véges formulasorozat, hogy $\alpha_n = \varphi$ és minden $i \leqslant n$-re α_i 4.3. definíció szerint áll elő, de akkor ugyanez a sorozat egy $\Sigma \subseteq \Gamma$-beli levezetés is, tehát $\mathrm{ded}(\Sigma) \subseteq \mathrm{ded}(\Gamma)$.

(3) idempotens: (1) miatt $\Sigma \subseteq \mathrm{ded}(\Sigma)$, tehát (2) miatt $\mathrm{ded}(\Sigma) \subseteq \mathrm{ded}(\mathrm{ded}(\Sigma))$. Másik tartalmazás: legyen $\varphi \in \mathrm{ded}(\mathrm{ded}(\Sigma))$, ekkor létezik olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \varphi$ formulasorozat, hogy minden $i \leqslant n$-re α_i:

- axióma VAGY
- eleme $\mathrm{ded}(\Sigma)$-nak VAGY
- `MP`-vel áll elő a korábbi α_j-kből.

Azonban bármely $\alpha_k \in \mathrm{ded}(\Sigma)$ lecserélhető Σ-beli levezetésre, ezeket lecserélve $\Sigma \vdash \varphi$ adódik, tehát $\mathrm{ded}(\mathrm{ded}(\Sigma)) \subseteq \mathrm{ded}(\Sigma)$. A kölcsönös tartalmazás miatt az egyenlőség fennáll. □

0.2. tétel (Dedukciós-tétel)**.** *Az alábbiak ekvivalensek:*

1. $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$

2. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Bizonyítás. Először (1) $\Rightarrow$ (2) bizonyítása következik. Tegyük fel, hogy $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, ekkor a ded monotonitása miatt $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, az extenzivitás miatt pedig $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$. Így `MP`-vel elő tud állni ψ, azaz $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Most következzen (2) $\Rightarrow$ (1). Tegyük fel, hogy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a ψ levezetése $\Sigma \cup \{\varphi\}$-ből, i szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \alpha_i$ minden $i \leqslant n$-re.

Legyen $i = 1$ (3 eset lehetséges), ha $\alpha_1 \in \Sigma$, akkor AX1 alkalmazásával $\Sigma \vdash \alpha_1 \Rightarrow \varphi \Rightarrow \alpha_1$ és mivel $\alpha_1 \in \Sigma$, ezért $\Sigma \vdash \alpha_1$ és így $\varphi \Rightarrow \alpha_1$ `MP`-vel előállítható.

Ha $\alpha_1 = \varphi$, akkor 4.1 példa szerint $\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \varphi$, így a monotonitás miatt $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi$.

Utolsó esetben, ha α_1 axióma, akkor AX1 alkalmazásával $\Sigma \vdash \alpha_1 \Rightarrow \varphi \Rightarrow \alpha_1$ és mivel α_1 axióma, ezért $\Sigma \vdash \alpha_1$ és így `MP`-vel előállítható $\varphi \Rightarrow \alpha_1$, azaz $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \alpha_1$.

Az indukciós lépés:
Tegyük fel, hogy minden $j < i$-re tudjuk, hogy $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \alpha_j$ (kell: $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \alpha_i$). Amennyiben α_i axióma vagy $\alpha_i \in \Sigma \cup \{\varphi\}$, akkor $i = 1$-ben szereplő eljárást kell megismételni.

Amennyiben α_1 `MP`-vel áll elő, akkor léteznek olyan α_k, α_l formulák, hogy $k, l < i$ és $\alpha_l = (\alpha_k \Rightarrow \alpha_i)$. Az indukciós feltevés miatt $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \alpha_l$, azaz

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow (\alpha_k \Rightarrow \alpha_i)$$

$$\vdash (\varphi \Rightarrow (\alpha_k \Rightarrow \alpha_i)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \alpha_k) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \alpha_i) \text{ AX2 alkalmazásával}$$

$$\vdash (\varphi \Rightarrow \alpha_k) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \alpha_i) \texttt{ MP-vel}$$

$$\vdash (\varphi \Rightarrow \alpha_k) \text{ az indukciós feltevés miatt}$$

$$\vdash \varphi \Rightarrow \alpha_i \texttt{ MP-vel}$$

□

0.6. definíció. *Legyen Σ formulahalmaz. Σ-t ellentmondásosnak nevezzük, ha van olyan α, hogy $\Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg\alpha$.*

0.2. lemma. *Legyen Σ formulahalmaz és φ egy formula: 1. $\Leftrightarrow$ 2. és 3. $\Leftrightarrow$ 4., ahol*

1. $\Sigma \vdash \varphi$,
2. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ *ellentmondásos,*
3. $\Sigma \vdash \neg\varphi$,
4. $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *ellentmondásos.*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. Tegyük fel, hogy $\Sigma \vdash \varphi$. A monotonitás miatt $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. Továbbá $\neg\varphi \in \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, így $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$, azaz $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos.

2. $\Rightarrow$ 1. Tegyük fel, hogy $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos, így létezik olyan α, hogy $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \alpha$ és $\Sigma \cup \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\alpha$.

A dedukciós-tételt alkalmazva az előbbi két esetben adódik, hogy:

$$\Sigma \vdash \neg\varphi \Rightarrow \alpha$$

$$\vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg\alpha$$

$$\vdash (\neg\varphi \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \varphi \text{ AX3 egy példánya}$$

$$\vdash \varphi \text{ } \mathtt{MP} \text{ kétszer alkalmazva.}$$

Az utolsó Modus Ponens részletezve: 1. és 3. sorból előáll $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \varphi$, ebből és 2. sorból előáll φ.

3. $\Rightarrow$ 4. pontosan úgy, mint 1. $\Rightarrow$ 2.

4. $\Rightarrow$ 3. Tegyük fel, hogy $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos. Vegyük észre, hogy $\{\neg\neg\varphi, \neg\varphi\}$ ellentmondásos formulahalmaz, így 2. $\Rightarrow$ 1. miatt $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$, emiatt $\mathrm{ded}(\Sigma \cup \{\varphi\}) \subseteq \mathrm{ded}(\Sigma \cup \{\neg\neg\varphi\})$ és így $\Sigma \cup \{\neg\neg\varphi\}$ is ellentmondásos. Alkalmazva 2. $\Rightarrow$ 1. állítást $\Sigma \vdash \neg\varphi$, azaz 3. fennáll. □

0.3. tétel. *Ha Σ ellentmondásos és φ tetszőleges, akkor $\Sigma \vdash \varphi$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Σ ellentmondásos, azaz létezik egy olyan α, hogy $\Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg\alpha$. A monotonitás miatt $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \alpha, \neg\alpha$, amiből $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásossága következik. Az előző tétel 2. $\Rightarrow$ 1. része miatt $\Sigma \vdash \varphi$ teljesül. □