A matematika alapjai

5. előadás

2014. április 18.

1. Tétel (Helyességi)**.** *Legyen Σ formulahalmaz, φ formula. Ekkor ha $\Sigma \vdash \varphi$, akkor $\Sigma \models \varphi$.*

2. Megjegyzés. Ez a teljességi tétel „könnyebb” iránya.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\Sigma \vdash \varphi$, ezért létezik $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \varphi$ formulasorozat, hogy minden i esetén α_i axióma vagy $\in \Sigma$ (feltétel) vagy MP-vel adódik korábbi α_j-kből.

Legyen k tetszőleges értékelés, amelyre $k \models \Sigma$.

Be kell látnunk, hogy

$$k \models \varphi,$$

amellyel a bizonyítással készen vagyunk.

Könnyen látható, hogy elég belátni i-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy $k \models \alpha_i$, mert $i = n$ esetén $k \models \alpha_n = \varphi$.

Ha $i = 1$, akkor ha

- α_1 axióma, akkor $k \models \alpha_1$, mert táblázattal ellenőrízhető, hogy mindhárom axiómaséma minden értékelésben igaz,
- $\alpha_1 \in \Sigma$, akkor $k \models \alpha_1$.

Tegyük fel, hogy tudjuk már, hogy ha $j < i$, akkor $k \models \alpha_j$. Meg kell mutatnunk, hogy

$$k \models \alpha_i.$$

Két eset adódik α_i megválasztásából. Ha

- α_i axióma vagy $\in \Sigma$, akkor mint $i = 1$ esetben látható: $k \models \alpha_i$,
- α_i MP-vel adódik korábbiakból, akkor van $j, l < i$, hogy $\alpha_j =$ ”$\alpha_l \Rightarrow \alpha_i$”. Indukció miatt $k \models \alpha_l$ és $k \models \alpha_j$, azaz $k \models \alpha_l \Rightarrow \alpha_i$. Az implikáció igazságtáblája miatt $k \models \alpha_i$.

□

3. Definíció. Legyen Σ formulahalmaz. Azt mondjuk, hogy Σ teljes formulahalmaz, ha tetszőleges φ formulára $\Sigma \vdash \varphi$ vagy $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

1. Lemma. *Legyen Σ ellentmondástalan formulahalmaz, ekkor van Σ' teljes ellentmondástalan formulahalmaz, amelyre $\Sigma \subseteq \Sigma'$. (Sőt tetszőleges φ formulára: $\varphi \in \Sigma'$ vagy $\neg\varphi \in \Sigma'$.)*

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_n : n \in \mathbb{N})$ az összes formula egy felsorolása. Megadunk egy $(\Sigma_n : n \in \mathbb{N})$ formulahalmazokból álló sorozatot, amelyre $\Sigma_0 = \Sigma$ és

(i) $m \leq n \Longrightarrow \Sigma_m \subseteq \Sigma_n$,

(ii) Σ_n ellentmondástalan,

(iii) $\varphi_n \in \Sigma_{n+1}$ vagy $\neg\varphi_n \in \Sigma_{n+1}$.

Tegyük fel, hogy Σ_n adott már úgy, hogy (i),(ii) és (iii) teljesül. Legyen

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{ha ez ellentmondástalan,} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az (i) és (iii) nyilván érvényben marad ekkor.

1. Állítás. *A (ii) tulajdonság is érvényben marad.*

Ugyanis ha

- $\Sigma_n \cup \{\varphi_n\}$ ellentmondástalan, akkor Σ_{n+1} is,
- $\Sigma_n \cup \{\varphi_n\}$ ellentmondásos, akkor $\Sigma_n \vdash \neg\varphi_n$, ezért

$$Ded(\Sigma_n) = Ded(\Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\}),$$

így mivel Σ_n ellentmondástalan, ezért Σ_{n+1} is az.

Legyen $\Sigma' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$.

2. Állítás. *Ez jó, azaz $\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma'$, és Σ' teljes, ellentmondástalan.*

A (iii) tulajdonság miatt tetszőleges φ-re $\varphi \in \Sigma'$ vagy $\neg\varphi \in \Sigma'$, tehát Σ' teljes.

Σ' ellentmondástalan marad, mert indirekt tegyük fel, hogy Σ' ellentmondásos, azaz van olyan α formula, amelyre $\Sigma' \vdash \alpha$ és $\Sigma' \vdash \neg\alpha$. Ekkor van olyan N, hogy $\Sigma_N \vdash \alpha$ és $\Sigma_N \vdash \neg\alpha$, ami ellentmondás a (ii) tulajdonság miatt.

Ezzel a bizonyítás kész. $\square$

2. Lemma (Henkin)**.** *Ha Γ teljes (erős értelemben) és ellentmondásmentes, akkor van k értékelés, amelyre $k \models \Gamma$, azaz Γ-nak van modellje.*

Bizonyítás. Legyen

$$k(x) = \begin{cases} i, & \text{ha } x \in \Gamma, \\ h, & \text{különben} \end{cases}$$

amely jól definiált és ahol x ítéletváltozó. Összetettség szerinti indukcióval belátjuk, hogy tetszőleges φ-re:

(1) $$k \models \varphi \quad \text{ACSA} \quad \varphi \in \Gamma.$$

- Alaplépés: ha φ ítéletváltozó, akkor az (1) fennáll a k definíciója miatt.
- Indukciós lépés: tegyük fel, hogy az (1) igaz φ, ψ-re.

  Ekkor az (1) igaz marad $\neg\varphi$-re, mert:

$$k \models \neg\varphi \quad \text{ACSA} \quad k \not\models \varphi \quad \text{ACSA} \quad \varphi \notin \Gamma \quad \text{ACSA} \quad \neg\varphi \in \Gamma.$$

  Továbbá az (1) igaz marad $\varphi \Rightarrow \psi$-re is:

3. Állítás. *$\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma$ ACSA, ha $\neg\varphi \in \Gamma$ vagy $\psi \in \Gamma$.*

Bizonyítás. (i) $\Longrightarrow$ irány

Indirekt tegyük fel, hogy $\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma, \neg\varphi \notin \Gamma$ és $\psi \notin \Gamma$. Ekkor Γ teljessége miatt $\varphi \in \Gamma$ és $\neg\psi \in \Gamma$. Mivel $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ és $\Gamma \vdash \varphi$, ezért MP-vel kapjuk, hogy $\Gamma \vdash \psi$, ami lehetetlen, mert Γ ellentmondástalan.

(ii) $\Longleftarrow$ irány

Tegyük fel, hogy $\psi \in \Gamma$. Ekkor $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi$ az 1. axióma miatt és $\Gamma \vdash \psi$ a feltétel miatt, amelyekből MP-sel kapva $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. Γ ellentmondástalansága és teljessége miatt $\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma$.

A másik esetben, azaz, ha $\neg\varphi \in \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos, ezért $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. A dedukciós tétel miatt $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, így Γ ellentmondástalansága és teljessége miatt $\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma$.

□

Így

$$\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma \quad \text{ACSA} \quad \neg\varphi \in \Gamma \text{ vagy } \psi \in \Gamma \quad \text{ACSA} \quad k \not\models \varphi \text{ vagy } k \models \psi \quad \text{ACSA} \quad k \models \varphi \Rightarrow \psi,$$

azaz az (1) igaz maradt. □

4. Tétel (Teljességi)**.** *Legyen Σ formulamhalmaz, φ formula. Ekkor*

$$\Sigma \vdash \varphi \quad ACSA \quad \Sigma \models \varphi.$$

Bizonyítás. Elég a $\Longleftarrow$ irányt bizonyítani, mert a $\Longrightarrow$ irány az 1. tétel. Feltehető, hogy Σ ellentmondástalan, hisz ha Σ ellentmondásos volna, akkor $\Sigma \vdash \varphi$ teljesülne. Tegyük fel, hogy $\Sigma \models \varphi$. Mivel $\Sigma \models \varphi$, ezért nincs olyan k értékelés, hogy $k \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$.

4. Állítás. *$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos.*

Bizonyítás. Ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondástalan volna, akkor az 1. lemma miatt lenne teljes ellentmondástalan Γ, hogy $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma$. Másrészt a Henkin-lemma miatt lenne k, hogy $k \models \Gamma$, speciális módon $k \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, ami ellentmondás. □

Tehát $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos, amely éppen azt jelenti, hogy $\Sigma \vdash \varphi$. □

5. Megjegyzés. Az 1.rendű logikának is van teljességi tétele. A bizonyítás hasonló sémát követ:

1. szintaktikus alapozás,
2. helyességi tétel (a bizonyítás hasonló),
3. minden ellentmondástalan 1.rendű Σ kiterjeszthető teljes ellentmondástalan Σ'-vé,
4. Henkin-lemma: ha Γ teljes ellentmondástalan, akkor van $\mathcal{A}$ struktúra, hogy $\mathcal{A} \models \Gamma$. (Sőt $\mathcal{A}$ alaphalmaza megszámlálható.)

6. Megjegyzés. A teljességi tétel miatt a logika felépíthető tisztán szintaktikus módon. Ez a halmazelmélet logikai alapozásánál elkerülhetővé teszi a halmazokra való hivatkozást.