A MATEMATIKA ALAPJAI

9. előadás

0.1. Rendszámok

0.1. definíció. *$(A,<)$ rendezett halmaz, ha $<$ irreflexív, tranzitív és trichotóm:*

$(\forall x,y \in A)(x < y \vee x = y \vee y < x)$ (a másik két tulajdonság miatt pont az egyik teljesül).

0.2. definíció. *$(A,<)$ jólrendezés, ha minden nemüres $C \subseteq A \Rightarrow C$-ben van legkisebb elem.*

0.3. definíció. *Legyen A halmaz $\in_A = \{\langle a,b\rangle : a,b \in A, a \in b\}$. $(A, \in_A)$ az A halmaz ϵ-struktúrája.*

0.4. definíció. *A tranzitív halmaz, ha $\forall x(x \in A \Rightarrow x \subseteq A)$. Előbbivel ekvivalens, hogy $y \in x \in A \Rightarrow y \in \in A$.*

0.5. definíció. *α rendszám, ha tranzitív halmaz és $(\alpha, \in_\alpha)$ jólrendezett.*

0.1. példa. *$\emptyset$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ rendszámok.*

0.6. definíció. *Legyen α, β rendszám, ekkor $\alpha < \beta$, ha $\alpha \in \beta$.*

0.1. tétel. *Legyen α, β, γ rendszám, C pedig rendszámokból álló halmaz.*

(a) Ha $x \in \alpha$, akkor x rendszám.
(b) Ha $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta)$, akkor $\alpha = \beta$ (mint halmazok).
(c) $\alpha \not< \alpha$, azaz $<$ irreflexív.
(d) Ha $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, akkor $\alpha < \gamma$, azaz $<$ tranzitív.
(e) $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$ közül pontosan az egyik teljesül.
(f) Ha $C \neq \emptyset$, akkor C-ben van legkisebb elem.

Bizonyítás. (a) x tranzitív halmaz, ehhez feltesszük, hogy $u \in v \in x$. Kell, hogy $u \in x$. Mivel α tranzitív, ezért $x \subseteq \alpha$, tehát $v \in \alpha$és ugyanígy $u \in \alpha$. Tehát $\langle u,v\rangle \in\in_\alpha$és $\langle v,x\rangle \in\in_\alpha$, mivel $\in_\alpha$ tranzitív, ezért $\langle u,x\rangle \in\in_\alpha$, tehát $u \in x$. Mivel $x \subseteq \alpha$, ezért $(x, \in_x)$ részstruktúrája $(\alpha, \in_\alpha)$-nak, így örökli annak (univerzális) tulajdonságait, tehát $(x, \in_x)$ rendezés x-en. Jólrendezés is, mert legyen $\emptyset \neq B \subseteq X$, nyilvánvalóan $B \subseteq \alpha$, ekkor a $(\alpha, \in_\alpha)$ szerinti legkisebb elem B-ben az $\in_x$ rendezés szerint is legkisebb lesz. Tehát x rendszám.
(b) Tegyük fel, hogy $f : \alpha \to \beta$ izomorfizmus $(\alpha, \in_\alpha)$és $(\beta, \in_\beta)$ között. Elég megmutatni, hogy $f = \mathrm{id}_\alpha$. Legyen $A = \{x \in \alpha : f(x) \neq x\}$. Ha $A = \emptyset$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$. Tudjuk, hogy $A \subseteq \alpha$, A-nak van egy legkisebb γ eleme $\in_\alpha$ rendezés szerint. $\gamma \in A \subseteq \alpha$, ezért $\gamma \in \alpha$és $f(\gamma) \in \beta$. Minden $x \in \alpha$-ra, ha $x \in \gamma \Leftrightarrow x < \gamma \Leftrightarrow \Big(f(x) < f(\gamma)$ és $f(x) = x\Big) \Leftrightarrow x < f(\gamma) \Leftrightarrow x \in f(\gamma)$. Ezért $f(\gamma) = \gamma$, ellentmondás.
(c) Tegyük fel, hogy $\alpha < \alpha$, amelyből $\alpha \in \alpha$ következik. Tehát $\langle \alpha, \alpha\rangle \in\in_\alpha$, de $\in$ jólrendezi α-t, tehát ez ellentmondás.
(d) Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$, valamint $\beta < \gamma$, ekkor $\alpha \in \beta$és $\beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \beta \in \gamma$. Mivel γ tranzitív, ezért $\alpha \in \gamma$, azaz $\alpha < \gamma$.
(e) A (c)és (d) pontok miatt legfeljebb az egyik teljesülhet. Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$és $\alpha = \beta$, ekkor

$\alpha < \alpha$, ellentmondás. Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$és $\beta < \alpha$, ekkor $\alpha < \alpha$ a tranzitivitás miatt, ami megint ellentmondás. Kell még, hogy az egyik biztosan teljesül, ehhez kimondunk egy lemmát.

0.1. lemma. *Ha $\alpha \neq \alpha \cap \beta$, ekkor $\alpha \cap \beta \in \alpha$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha \neq \alpha \cap \beta$. Ekkor $\alpha \setminus \alpha \cap \beta \neq \emptyset$, így van benne egy minimális x elem. Megmutatjuk, hogy $x \subset \alpha \cap \beta$. Legyen $y \in x$ tetszőleges, tudjuk, hogy $x \in \alpha$ (mert $\in \alpha \setminus \alpha \cap \beta$) mivel α tranzitív, ezért $y \in \alpha$. Most megmutatjuk, hogy $y \notin \alpha \setminus \alpha \cap \beta$, amelyből következik, hogy $y \in \alpha \cap \beta$. Ez valóban nem lehet, mert $y \in x \Leftrightarrow y < x$, de x minimális volt $\alpha \setminus \alpha \cap \beta$-ban.

Most megmutatjuk, hogy $\alpha \cap \beta \subset x$. Legyen $u \in \alpha \cap \beta$. Tudjuk, hogy $u, x \in \alpha$, ezért $\in_\alpha$ trichotómiája miatt $u \in x$ vagy $u = x$ vagy $x \in u$. Utóbbi kettő nem teljesül, mert:

- ha $u = x$, akkor $u \in \alpha \cap \beta$és $x \in \alpha \cap \beta$ ellentmondást okoz,
- ha $x \in u$, akkor $x \in u \in \alpha \cap \beta$ miatt $u \in \alpha$és $u \in \beta$. α, β tranzitív, ezért $x \in \alpha$és $x \in \beta$ is teljesül, azaz $x \in \alpha \cap \beta$, ami ellentmondás, hiszen $x \in \alpha \setminus \alpha \cap \beta$.

Megmutattuk, hogy $u \in x$ fennáll, tehát $\alpha \cap \beta \subset x$. Megkaptuk, hogy $\alpha \cap \beta = x$és $x \in \alpha$. □

Folytatva (e) pont bizonyítását négy különböző esetet találunk:

1. $\alpha = \alpha \cap \beta = \beta$, ekkor $\alpha = \beta$.
2. $\alpha = \alpha \cap \beta \neq \beta$, ekkor 9.1 lemma miatt $\alpha \cap \beta = \alpha \in \beta$, azaz $\alpha < \beta$.
3. $\alpha \neq \alpha \cap \beta = \beta$, ekkor 9.1 lemma miatt $\alpha \cap \beta = \beta \in \alpha$, azaz $\beta < \alpha$.
4. $\alpha \neq \alpha \cap \beta \neq \beta$, ami pedig nem lehet, mert 9.1 lemma miatt $\alpha \cap \beta \in \alpha$és $\alpha \cap \beta \in \beta$, ami miatt $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta = \gamma$ (γ rendszám (a) pont miatt)és így $\langle \alpha \cap \beta, \alpha \cap \beta \rangle \in \in_\gamma$ ellentmond az irreflexivitásnak.

Következzen az (f) pont bizonyítása. Tegyük fel, hogy $C \neq \emptyset$, ekkor legyen $\alpha \in C$ tetszőleges. Ha $\alpha \cap \cap C = \emptyset$, akkor α a C legkisebb eleme, mert ha lenne $\beta \in C$ úgy, hogy $\beta < \alpha$, akkor $\beta \in \alpha \cap C$ lenne. Ha $\alpha \cap C \neq \emptyset$, akkor $\alpha \cap C$ jólrendezett, mert α rendszám, így van benne egy legkisebb α' elem, ekkor $\alpha' \cap C = \emptyset$. Ha nem így lenne, akkor létezne egy $y \in \alpha'$és $y \in C$ elem, ekkor $y < \alpha'$, de α' legkisebb elem, ellentmondás. □

0.2. tétel. *Legyen φ formula, ha létezik φ tulajdonságú rendszám, akkor van legkisebb φ tulajdonságú rendszám. Más szavakkal: rendszámok nemüres osztályának van legkisebb eleme.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy α egy rendszámés $\varphi(\alpha)$, azaz φ tulajdonságú. Legyen $C = \{\beta \in \alpha : \varphi(\beta)\}$. Ha $C = \emptyset$, akkor α a legkisebb elem. Ha $C \neq \emptyset$, akkor 9.1 tétel (f) pontja miatt van benne legkisebb elem. □

0.7. definíció. On $= \{x : x \textit{ rendszám}\}$.

0.1. állítás. On *osztály, de nem halmaz.*

Bizonyítás. Mivel a rendszám definíciója formalizálható, ezért a rendszámok osztályt alkotnak. Ellentmondást keresve tegyük fel, hogy On halmaz, ekkor tranzitív is, mert $y \in x \in \mathrm{On}$ esetén 9.1. tétel (a) pontja miatt y rendszám és ezért $y \in \mathrm{On}$. A 9.1. tétel (c), (d), (e), (f) pontjai miatt $(\mathrm{On}, \in_{\mathrm{On}})$ jólrendezett, azaz On rendszám és így $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$ ellentmondás lenne. □

0.8. definíció. *Legyen x halmaz. Az $S(x) = x \cup \{x\}$ az x rákövetkezője.*

0.2. állítás. *Ha α rendszám, akkor $S(\alpha)$ rendszám és $S(\alpha)$ az α-nál nagyobb rendszámok közül a legkisebb.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \in y \in S(\alpha)$, ekkor $y \in \alpha$ vagy $y = \alpha$. Ha $y \in \alpha$, akkor α tranzitivitása miatt $x \in \alpha$. Ha $y = \alpha$, akkor $x \in \alpha$. Ezért $x \in S(\alpha)$. $S(\alpha)$-ban α elemeihez képest egy darab új elem van, ez α, amely nagyobb α összes eleménél, így $(S(\alpha), \in_{S(\alpha)})$ jólrendezés. Megmutattuk, hogy $S(\alpha)$ rendszám.

Mivel $\alpha \in S(\alpha)$, ezért $\alpha < S(\alpha)$ és ha $\beta < S(\alpha)$, akkor $\beta \in S(\alpha) \Rightarrow \beta \in \alpha$ vagy $\beta = \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha$, így α és $S(\alpha)$ közt további rendszám már nincs. $\square$