ELTE TTK   Matematika Alapjai ZH (1. rész)
2020 november 5.

1. Formalizáljuk a következő mondatokat abban az elsőrendű nyelvben, melyben pontosan a következő relációszimbólumok vannak:

$B(x):\ x$ bicikli, $R(x):\ x$ roller, $K(x):\ x$ kék,
$D(x,y):\ x$ drágább, mint y.

(a) Van olyan roller, amely minden biciklinél drágább.
(b) Az összes kék bicikli drágább az összes kék rollernél.

(8 pont)

2. Legyen $\Sigma = \{\neg B \Rightarrow \neg A,\ \ \neg(B \wedge C)\}$ és legyen $\varphi = A \Rightarrow \neg C$.
Döntsük el, hogy $\Sigma \models \varphi$ fennáll-e. Indokoljunk.

(8 pont)

3. A Σ formulahalmazban olyan, páronként inekvivalens nulladrendű formulák vannak, melyekben legfeljebb az x, y ítéletváltozók fordulnak elő, és ha $\varphi, \psi \in \Sigma$, akkor a $\varphi \models \psi$ vagy a $\psi \models \varphi$ összefüggések egyike fennáll. Igazoljuk, hogy Σ legfeljebb 5-elemű.

(8 pont)

4. Legyen $\varphi = \forall x(x \neq f(x))\ \wedge\ \forall x \exists y(f(y) = x))$.
(a) Adjunk meg egy $\mathcal{A}$ struktúrát, melynek alaphalmaza véges, és $\mathcal{A} \models \varphi$.
(b) Adjunk meg egy $\mathcal{B}$ struktúrát, melynek alaphalmaza végtelen, és $\mathcal{B} \models \varphi$.
Az (a) és (b) részben is indokoljunk.

(12 pont)

5. Az elsőrendű $\mathcal{L}$ nyelvben P 3-változós relációszimbólum (és $\mathcal{L}$ az egyenlőségjelen kívül nem tartalmaz más reláció-, függvény- és konstanszszimbólumot). Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák alaphalmaza a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza;
$\mathcal{A}$-ban $\langle a, b, c\rangle \in P^{\mathcal{A}}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a + b + c$ páros,
$\mathcal{B}$-ben $\langle a, b, c\rangle \in P^{\mathcal{B}}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a + b + c$ osztható 3-al.
(a) Teljesül-e $\mathcal{A} \models \forall x \exists y P(x, x, y)$? Indokoljunk.
(b) Adjunk meg az $\mathcal{L}$ nyelven egy olyan φ formulát, melyre $\mathcal{B} \models \varphi$ de $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(12 pont)

6. A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy

$$\text{Ha}\ \ \Sigma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C \quad \text{akkor} \quad \Sigma \vdash\ \neg C \Rightarrow B \Rightarrow \neg A.$$

(12 pont)

Minden választ indokoljunk !