ELTE TTK Matematika Alapjai ZH (2. rész)
2020 december 9.

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\langle A_i : i \in I\rangle$ halmazrendszerre és B halmazra teljesül, hogy

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) - B \;=\; \bigcup_{i\in I}\Big(A_i - B\Big).$$

(8 pont)

2. Legyen minden $n \in \omega$-ra $A_n \subseteq \mathbb{R}^2$ a sík egy konvex részhalmaza. Igazoljuk, hogy ha minden $n \in \omega$-ra $A_n \subseteq A_{n+1}$, akkor

$$\bigcup_{n\in\omega} A_n$$

konvex halmaz. (Emlékeztető: a sík egy B részhalmaza konvex, ha minden $P, Q \in B$-re $\overline{PQ} \subseteq B$ is teljesül, ahol $\overline{PQ}$ jelöli a P és Q pontokat összekötő szakaszt.)

(10 pont)

3. Igazoljuk, hogy ha A tranzitív halmaz, akkor $\mathcal{P}(A)$ is tranzitív halmaz.

(10 pont)

4. Adjunk meg ω-n végtelen sok, páronként nem izomorf lineáris rendezést.

(10 pont)

5. Legyen

$$U = \{f : \omega \to \omega :\ \Big(\forall n \in \omega\Big)\Big(n^4 \leq f(n)\Big)\}.$$

Igazoljuk, hogy $U \sim \mathcal{P}(\omega)$.

(10 pont)

6. Az $\mathcal{A} = \langle A, \leq^{\mathcal{A}}\rangle$ részbenrendezett halmazra teljesül a Zorn-lemma feltétele. Igaz-e, hogy ha $\mathcal{B} = \langle B, \leq^{\mathcal{B}}\rangle$ részstruktúrája $\mathcal{A}$-nak (azaz $B \subseteq A$ és minden $x, y \in B$-re $x \leq^{\mathcal{B}} y$ ekvivalens $x \leq^{\mathcal{A}} y$-val) akkor $\mathcal{B}$-re is teljesül a Zorn-lemma feltétele?

(12 pont)

Minden választ indokoljunk !