ELTE TTK   Matematika Alapjai Pót-ZH (1. rész)
2020 ősz

1. Formalizáljuk a következő mondatokat abban az elsőrendű nyelvben, melyben pontosan a következő relációszimbólumok vannak:

$B(x):$ x bicikli, $R(x):$ x roller, $K(x):$ x kék,
$D(x,y):$ x drágább, mint y.

(a) Ha egy roller kék, akkor van nála drágább bicikli.
(b) Ha egy kék bicikli drágább egy másik biciklinél, akkor drágább az összes rollernél is.

(8 pont)

2. legyen $f : \{i,h\}^4 \to \{i,h\}$ az a függvény, melyre $f(x,y,z,u) = i$ pontosan akkor teljesül, ha x, y, z és u közül pontosan 3 darab igaz. Adjunk meg egy f-t leíró DNF-t.

(8 pont)

3. Legyen $\Sigma = \{\neg(x \wedge y) \Rightarrow \neg z\}$ és legyen Γ nulladrendű formulák olyan halmaza, hogy Γ elemei páronként inekvivalensek, legfeljebb az x, y, z ítéletváltozók fordulnak elő bennük, továbbá minden $\varphi \in \Gamma$-ra $\Sigma \models \varphi$. Igazoljuk, hogy $|\Gamma| \leq 8$.

(8 pont)

4. Legyen legyen $\varphi = \forall x \forall y \forall z (E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge E(y,z))$ és legyen

$$\Sigma = \{\forall x \neg E(x,x), \ \ \forall x \exists y \exists z \forall u (E(x,u) \Rightarrow (u = y \vee u = z))\}.$$

Igazoljuk, hogy φ független Σ-tól.

(12 pont)

5. Legyen

$$\Sigma = \{\exists z \forall x \forall y \big(f(x,y) \neq z\big), \ \ \forall x \forall y \forall u \forall v \big(x \neq u \vee y \neq v \Rightarrow f(x,y) \neq f(u,v)\big)\}.$$

Adjuk meg Σ egy modelljét.

(12 pont)

6. A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy

$$\{A \Rightarrow B, \ \ B \Rightarrow C, \ \ \neg C\} \vdash \neg A.$$

(12 pont)

Minden választ indokoljunk !