Definició: A φ formula *független* a Σ formulahalmaztól, ha $\Sigma \not\models \varphi$ és $\Sigma \not\models \neg\varphi$.

1. Mutassuk meg, hogy a csoport-axiómáktól független a kommutativitás.

2. Mutassuk meg, hogy a lineáris rendezések elméletétől független, hogy van-e legnagyobb elem.

3. Alkalmas elsőrendű modell megadásával mutassuk meg, hogy Σ-nak nem következménye φ:

- **(a)** $\Sigma = \{\forall x(P(x) \vee Q(x))\}$, $\varphi = \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.
- **(b)** $\Sigma = \{\forall x\forall y(R(x,y) \to R(y,x)), \forall x\forall y\forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))\}$, $\varphi = \forall x R(x,x)$.
- **(c)** $\Sigma = \{\forall x\exists y R(x,y)\}$, $\varphi = \exists y\forall x R(x,y)$.

4. Az L nyelv egyetlen kétváltozós $<$ relációjelből áll. Legyen

$$\Sigma = \big\{\forall x\exists y(y < x),\ \forall x\exists y(x < y)\big\}.$$

Adj meg $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrákat, hogy $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ és $\mathcal{A} \models \phi$ valamint $\mathcal{B} \models \neg\phi$, ahol $\phi \equiv \forall x\forall y\exists z(x < z < y)$.

5. Adj meg $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$-t úgy, hogy $\mathcal{A} \models \phi$ és $\mathcal{B} \not\models \phi$ ahol $\phi \equiv \exists x(x \cdot x = 2)$.

6. Igaz-e, hogy $\forall x(f(f(x)) = x) \models \exists x(x = f(x))$?

7. Adjunk példát olyan elméletre, melytől egyetlen zárt formula sem független.

8. Mutassuk meg hogy ha $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\Sigma \models \varphi$, akkor $\Gamma \models \varphi$.

9. Adj meg $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ modelleket úgy, hogy $\mathcal{A} \models \Sigma \cup \{\varphi\}$ és $\mathcal{B} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, ahol

- **(a)** $\Sigma = \big\{\forall x(R(x, f(x))),\ \forall x\forall y(x \neq y \to f(x) \neq f(y))\big\}$ és $\varphi = \forall x\exists y(R(x,y) \wedge R(y, f(x)))$.
- **(b)** $\Sigma = \big\{\forall x E(x, f(x)),\ \forall x\exists y(x \neq y \wedge E(x,y))\big\}$ és $\varphi = \forall x\exists y(E(x,y) \wedge y \neq f(x))$.
- **(c)** $\Sigma = \big\{\forall x\forall y\exists z R(x,z,y),\ \forall x R(x, f(x), f(f(x)))\big\}$ és $\varphi = \exists x\forall y R(x,y,f(y))$.

10. Alkalmas modellek megadásával igazold, hogy φ független Σ-tól, ahol

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \forall x\forall y(E(x,y) \to E(y,x)), \\ \forall x(\neg E(x,x)) \\ \neg\exists x\exists y\exists z(x \neq y \ \wedge\ y \neq z \ \wedge\ z \neq x \ \wedge\ E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z)) \end{array} \right\}$$

$$\varphi = \forall x\Big(\exists y\exists z\Big(y \neq z \ \wedge\ E(x,y) \wedge E(x,z)\ \wedge\ \forall w\big(E(x,w) \to (w = y\ \vee\ w = z)\big)\Big)\Big).$$