

Axiómasémák:

- $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$

Modus ponens: $MP(\varphi, \varphi \rightarrow \psi) = \psi$.

Dedukciótétel: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma, \varphi \vdash \psi$.

Tétel: $\Sigma \vdash \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos.

Feladatok:

1. Tegyük fel, hogy $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ és $\vdash \psi \rightarrow \varphi$. Igaz-e ekkor, hogy $\vdash \varphi$ vagy $\vdash \psi$?
 2. Mutassuk meg, hogy $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ -ből levezethető $A \rightarrow C$.
 3. Igazold, hogy ha $\Sigma \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$, akkor $\Sigma \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$.
 4. Mutassuk meg, hogy $\{A \rightarrow B, C\}$ -ből B nem vezethető le.
 5. Mutassuk meg, hogy ha $\Sigma \models \varphi$, akkor van olyan véges $\Gamma \subseteq \Sigma$, hogy $\Gamma \models \varphi$.
 6. Teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy ha $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ és $\Sigma \vdash \neg\beta$, akkor $\Sigma \vdash \neg\alpha$.
 7. Igazold, hogy ha $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$ és $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \varphi$, akkor $\Sigma \vdash \varphi$.
 8. Mutasd meg a teljességi tétel felhasználása nélkül, hogy $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ akkor $\Sigma \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha$.
 9. Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \rightarrow \gamma$. A teljességi tétel felhasználása nélkül mutasd meg, hogy ekkor $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.
 10. Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ és $\Gamma \vdash \alpha$. A teljességi tétel felhasználása nélkül mutasd meg, hogy ekkor $\Gamma \vdash \beta$.
-
11. Melyek igazak tetszőleges A, B és C halmazokra az alábbiak közül?
 - (a) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (A \setminus A)$
 - (b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 - (c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ (Δ a szimmetrikus differencia)
 - (d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
 - (e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
 - (f) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$