

ELTE TTK Matematika Alapjai Vizsgakérdések, 2008 ősz

(A) Első Logika blokk

1. Nullad- és elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, formulák, termek).
2. Kiértékelések, struktúrák, a nullad- és elsőrendű formulák jelentése.
3. Formulák ekvivalenciája, szemantikus következmény fogalma.
4. Funkcionális teljesség. Minden nulladrendű formula ekvivalens egy DNF-el. Kvantorkiemelési szabályok. Minden elsőrendű formula ekvivalens egy prenex-alakúval.
5. Az itéletkalkulus axiómái, következtetési szabálya, a *Ded* operátor lezárási operátor.
6. Dedukciós tétel.
7. Ellentmondásos formulahalmaz fogalma, $\Sigma \vdash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos; $\Sigma \vdash \neg\varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos. Ellentmondásos formulahalmazból minden levezethető.
8. Helyességi tétel (bizonyítással); teljességi tétel (bizonyítás nélkül).

(B) Halmazelmélet blokk

9. Halmazok ekvivalenciája ($a \sim$ reláció) és alaptulajdonságai (reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás, kompatibilitás).
10. A kiválasztási axióma, injektív és szürjektív függvények létezése közti kapcsolatok, megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
11. A Bernstein-féle antiszimmetria tétel.
12. A hatványhalmaz fogalma, egyetlen halmaz sem ekvivalens hatványhalmazával, a számosság naív definíciójának ellentmondásossága.
13. A halmazelmélet nyelve, ZFC axiómák. A nyelv bővítése. Az osztály fogalma.
14. Rendezett halmazok, jólrendezések, izomorfia, rendszámok, rendszám elemei rendszámok.
15. A rendszámok rendezése és alaptulajdonságai (irreflexivitás, tranzitivitás, trichotómia, ha egy osztályban van rendszám, akkor van benne legkisebb is).
16. Transzfinit indukció és helyessége.
17. Transzfinit rekurzió és helyessége.
18. A kiválasztási axióma néhány ekvivalense: minden halmazzal van ekvivalens rendszám, Zorn-lemma.
19. A számosságoperáció. A számosságok rendezése a rendszámok rendezésének leszűkítése. Limesz, és rákövetkező rendszámok. Minden végtelen számosság limeszrendszám.
20. Műveletek számosságokkal, és ezek alaptulajdonságai.
21. Disztributivitás. A számosságaritmetika alaptétele (az alaptétel bizonyítás nélkül).
22. A kofinalitás operáció. Végtelen számosság rákövetkezője reguláris rendszám.
23. Ha κ végtelen számosság, akkor $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$ és $cf(2^\kappa) > \kappa$. A kontinuum-probléma és kontinuum-hipotézis.

(C) Második Logika Blokk

24. A kompaktsági tétel két alakja.
25. Az elemi ekvivalencia és izomorfizmus fogalma. Ha \mathcal{A} végtelen struktúra, akkor van vele elemien ekvivalens, nem izomorf másik struktúra.
26. Ultraszűrő fogalma, létezése, véges halmaz felett minden ultraszűrő fő-ultraszűrő.
27. Minden véges metszet tulajdonságú halmazrendszer kiterjeszhető szűrővé, minden szűrő kiterjeszhető ultraszűrővé.
28. Struktúrák direkt- és ultraszorzatának definíciója. Loś-lemma (bizonyítás nélkül).
29. A kompaktsági tétel ultarszorzatossági bizonyítása.
30. Elsőrendben axiomatizálható modellosztályok jellemzése.