

ELTE TTK Matematika Alapjai Vizsgakérdések, 2010 ősz

(A) Első Logika blokk

1. Nullad- és elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, formulák, termek).
2. Kiértékelések, struktúrák, a nullad- és elsőrendű formulák jelentése.
3. Egy formula igazsága csak a benne szereplő szabad változók értékeitől függ.
4. Funkcionális teljesség. Minden nulladrendű formula ekvivalens egy DNF-el ill. KNF-el.
5. Formulák ekvivalenciája, szemantikus következmény fogalma.
6. Az itéletkalkulus axiómái, következtetési szabálya, a *Ded* operátor lezárási operátor.
7. Dedukciós tétel.
8. Ellentmondásos formulahalmaz fogalma, $\Sigma \vdash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos; $\Sigma \vdash \neg\varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos. Ellentmondásos formulahalmazból minden levezethető.
9. Helyességi tétel.
10. Minden ellentmondástalan formulahalmaz kiterjeszhető egy teljes, ellentmondástalan formulahalmazzá.
11. Teljességi tétel.

(B) Halmazelmélet blokk

12. Halmazok ekvivalenciája (a \sim reláció) és alaptulajdonságai (reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás, kompatibilitás).
13. A kiválasztási axióma, injektív és szürjektív függvények létezése közti kapcsolatok, megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
14. A Bernstein-féle antiszimmetria tétel.
15. A hatványhalmaz fogalma, egyetlen halmaz sem ekvivalens hatványhalmazával, a számosság naív definíciójának ellentmondásossága.
16. A halmazelmélet nyelve, ZFC axiómák. A nyelv bővítése. Az osztály fogalma.
17. Rendezett halmazok, jólrendezések, izomorfia, rendszámok, rendszám elemei rendszámok.
18. A rendszámok rendezése és alaptulajdonságai (irreflexivitás, tranzitivitás, trichotómia, ha egy osztályban van rendszám, akkor van benne legkisebb is).
19. A rendszámok valódi osztályt alkotnak. Limesz, és rákövetkező rendszámok. Limesz-rendszám létezése.
20. Transzfinit indukció és helyessége.
21. Transzfinit rekurzió és helyessége.
22. A kiválasztási axióma néhány ekvivalense: minden halmazzal van ekvivalens rendszám, Zorn-lemma.
23. A számosságoperáció definíciója és alaptulajdonságai. A számosságok rendezése a rendszámok rendezésének leszűkítése.
24. Műveletek számosságokkal, és ezek alaptulajdonságai.
25. Disztributivitás. A számosságaritmetika alaptétele (az alaptétel bizonyítás nélkül).
26. Az \aleph operáció. Kontinuum-probléma és kontinuum-hipotézis.

(C) Második Logika Blokk

27. A kompaktsági tétel két alakja.
28. Az elemi ekvivalencia és izomorfizmus fogalma. Izomorf struktúrák elemien ekvivalensek.
29. Reduktumok. A felszálló Löwenheim-Skolem tétel.
30. Ha \mathcal{A} végtelen struktúra, akkor van vele elemien ekvivalens, nem izomorf másik struktúra.