

ELTE TTK Matematika Alapjai Vizsgakérdések, 2023 ősz

(A) Első Logika blokk

1. Nullad- és elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, formulák, termek).
2. Kiértékelések, struktúrák, a nullad- és elsőrendű formulák jelentése.
3. Egy formula igazsága csak a benne szereplő szabad változók értékeitől függ.
4. Funkcionális teljesség. Minden nulladrendű formula ekvivalens egy DNF-el ill. KNF-el.
5. Formulák ekvivalenciája, szemantikus következmény fogalma.
6. Az itéletkalkulus axiómái, következtetési szabálya, a *Ded* operátor lezárási operátor.
7. Dedukciós tétel.
8. Ellentmondásos formulahalmaz fogalma, $\Sigma \vdash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos; $\Sigma \vdash \neg\varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos. Ellentmondásos formulahalmazból minden levezethető.
9. Helyességi tétel (azaz, ha $\Sigma \vdash \varphi$, akkor $\Sigma \models \varphi$).
10. Minden ellentmondástalan formulahalmaz kiterjeszthető egy teljes, ellentmondástalan formulahalmazzá.
11. Teljességi tétel (azaz, ha $\Sigma \models \varphi$, akkor $\Sigma \vdash \varphi$).

(B) Halmazelmélet blokk

12. Halmazok ekvivalenciája (a \sim reláció) és alaptulajdonságai (reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás, kompatibilitás).
13. A kiválasztási axióma, injektív és szürjektív függvények létezése közti kapcsolatok, megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
14. A Bernstein-féle antiszimmetria tétel.
15. A hatványhalmaz fogalma, egyetlen halmaz sem ekvivalens hatványhalmazával, a számosság naív definíciójának ellentmondásossága.
16. A halmazelmélet nyelve, ZFC axiómák. A nyelv bővítése. Az osztály fogalma.
17. Rendezett halmazok, jólrendezések, izomorfia, rendszámok, rendszám elemei rendszámok.
18. A rendszámok rendezése és alaptulajdonságai (irreflexivitás, tranzitivitás, trichotómia, ha egy osztályban van rendszám, akkor van benne legkisebb is).
19. A rendszámok valódi osztályt alkotnak. Limesz, és rákövetkező rendszámok. Limesz-rendszám létezése.
20. Transzfinit indukció és helyessége.
21. Transzfinit rekurzió és helyessége.
22. A kiválasztási axióma néhány ekvivalense: minden halmazzal van ekvivalens rendszám, Zorn-lemma.
23. A számosságoperáció definíciója és alaptulajdonságai. Minden végtelen számosság limeszrendszám.
24. Az \aleph operáció. A Kontinuum-probléma.

(C) Második Logika Blokk

27. Az elemi ekvivalencia és izomorfizmus fogalma. Izomorf struktúrák elemien ekvivalensek (a bizonyítás ötlete).
28. Minden elsőrendű nyelv-típushoz vannak nem izomorf, elemien ekvivalens struktúrák. Bizonyítás nélkül: a végtelen alaphalmazú struktúrákkal elemien ekvivalens struktúrákról szóló állítás.