Matematikai Logika Feladatok, 1.

1. Az $\mathbf{L}$ elsőrendű nyelvben minden $n \in \mathbb{N}$-re R_n egy 1-változós relációszimbólum (és $\mathbf{L}$ változtatható részében nincs más szimbólum). Ha $U, V \subseteq \mathbb{N}$ diszjunkt, véges halmazok, akkor legyen

$$\varphi_{U,V} = \exists x \Big(\bigwedge_{i \in U} (R_i(x) \ \wedge \bigwedge_{j \in V} \neg R_j(x) \Big)$$

és legyen $\Sigma = \{\varphi_{U,V} : U, V \subseteq \mathbb{N},\ U \cap V = \emptyset,\ U, V \text{ véges } \}$. Adjuk meg Σ két, nemizomorf modelljét. Indokoljunk.

2. Legyen $\mathcal{A}$ elsőrendű struktúra és legyen G az $\mathcal{A}$ automorfizmusainak csoportja (a kompozícióval, inverzfüggvény-képzéssel, mint műveletekkel). Igazoljuk, hogy ha $R \subseteq A$ definiálható, akkor R előáll G néhány pályájának uniójaként. (Akkor nevezzük R-t definiálhatónak, ha van olyan φ elsőrendű formula, melynek pontosan 1 szabad változója van és $R = ||\varphi||$.)

3. Legyenek $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}, \psi$ egy elsőrendű nyelv atomi formulái és legyen ϕ a

$$\varphi_0 \wedge ... \wedge \varphi_{n-1} \Rightarrow \psi$$

univerzális lezártja. Igazoljuk, hogy ha minden $i \in I$-re $\mathcal{A}_i \models \phi$, akkor

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \models \phi.$$

Játékszabályok.
1. Lehet közösen gondolkodni, de mindenki önállóan írja le a megoldásait, miután minden részletet megértett.
2. A megoldásokat legkésőbb 2024 március 22 (péntek) reggel 10:15-ig (a logika előadás kezdetéig) kell eljuttatni akár e-mail-en a sagi@renyi.hu címre, akár papíron. Mindkét esetben elég, ha kézzel írt megoldást adsz be (vagy fotózol le, és azt küldöd e-mail-en). Természetesen gépelt megoldásokat is be szabad adni.

2024 március.