# Matematikai Logika Feladatok, 2.

1. Legyen $I$ végtelen halmaz. Minden pozitív egész $n$ számra adjunk meg egy végtelen $E_n \subseteq \mathcal{P}(I)$ halmazrendszert úgy, hogy $E_n$ bármelyik $n$ darab elemének végtelen a metszete, de bármely különböző $n+1$ darab elemének üres a metszete.

2. Legyen $\mathcal{L}$ egy elsőrendű nyelv, legyen $K$ $\mathcal{L}$-nyelvű struktúrák egy elemi ekvivalenciára zárt osztálya, és legyen $\kappa$ az $\mathcal{L}$ nyelv összes formulájából álló halmaz számossága. Igazoljuk, hogy ha $K$ nem zárt ultraszorzatra, akkor van olyan $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ultraszűrő és $K$-beli stuktúráknak olyan $\langle \mathcal{A}_i : i \in \kappa \rangle$ rendszere, hogy

$$\prod_{i \in \kappa} \mathcal{A}_i / \mathcal{F} \notin K$$

(azaz, ha $K$ nem zárt ultraszorzatra, akkor már $\kappa$-tényezős (azaz viszonylag "rövid") ultraszorzatokra sem zárt).

3. Egy $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ részbenrendezett halmaz *megszámlálhatóan $\vee$-teljes*, ha $A$ minden megszámlálható részhalmazának van legkisebb felső korlátja. Igazoljuk, hogy a megszámlálhatóan $\vee$-teljes részbenrendezett halmazok osztálya nem zárt ultraszorzatra.

**Játékszabályok.**
1. Lehet közösen gondolkodni, de mindenki önállóan írja le a megoldásait, miután minden részletet megértett.
2. A megoldásokat legkésőbb 2024 április 12 (péntek) reggel 10:15-ig (a logika előadás kezdetéig) kell eljuttatni akár e-mail-en a sagi@renyi.hu címre, akár papíron. Mindkét esetben elég, ha kézzel írt megoldást adsz be (vagy fotózol le, és azt küldöd e-mail-en). Természetesen gépelt megoldásokat is be szabad adni.

2024 március.