ELTE TTK Matematikai Logika Vizsgakérdések, 2023 tavasz (2 oldal)

(A) Alapok

1. Nullad- és elsőrendű nyelvek szintaxisa (a nyelvek szimbólumai, formulák, termek).
2. Kiértékelések, struktúrák, a nullad- és elsőrendű formulák jelentése.
3. Egy elsőrendű formula igazsága csak a benne szereplő szabad változók értékeitől függ.
4. Formulák ekvivalenciája, a szemantikus következmény fogalma.
5. Funkcionális teljesség. Minden nulladrendű formula ekvivalens egy DNF-el ill. KNF-el.
6. Minden elsőrendű formula ekvivalens egy prenex-alakúval. Skolemizálás.
7. Izomorfizmus. Alapvető modellkonstrukciók (homomorf kép, részstruktúra, direktszorzat). A részstruktúra-képzés megőrzi az univerzális formulák igazságát.

(B) Ultraszűrők, ultraszorzatok

1. Ultraszűrő fogalma, létezése, véges halmaz felett minden ultraszűrő fő-ultraszűrő.
2. Minden véges metszet tulajdonságú halmazrendszer kiterjeszthető szűrővé, minden szűrő kiterjeszthető ultraszűrővé.
3. Ha a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ gráfok kromatikus száma végtelen, akkor $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ kromatikus száma is végtelen.
4. Az ultraszorzat definíciója. Łoś-lemma.
5. Reguláris ultraszűrők, létezésük, κ-reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatvány számossága.
6. Az elemi ekvivalencia fogalma. Minden végtelen struktúrához van vele nem izomorf, de elemien ekvivalens másik struktúra.
7. A kompaktsági tétel két alakja és ultraszorzatos bizonyítása.
8. Elsőrendben axiomatizálható és végesen axiomatizálható modellosztályok jellemzése.

(C) Levezetési rendszerek és teljességük

1. Az ítéletkalkulus axiómái, következtetési szabálya, a *Ded* operátor lezárási operátor.
2. Dedukciós tétel.
3. Ellentmondásos formulahalmaz fogalma, $\Sigma \vdash \varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásos; $\Sigma \vdash \neg\varphi$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ellentmondásos. Ellentmondásos formulahalmazból minden levezethető.
4. Nulladrendű helyességi tétel (azaz, ha $\Sigma \vdash \varphi$, akkor $\Sigma \models \varphi$).
5. Minden ellentmondástalan nulladrendű formulahalmaz kiterjeszthető egy teljes, ellentmondástalan formulahalmazzá.
6. Nulladrendű teljességi tétel (azaz, ha $\Sigma \models \varphi$, akkor $\Sigma \vdash \varphi$) .

7*. Az elsőrendű logika axiómái, következtetési szabályai, elsőrendű helyességi tétel.

8*. Az elsőrendű teljességi tétel vázlatosan (bizonyítások nélkül). Elég a főbb állításokat és a modellkonstrukciót tudni).

9. A Löwenheim-Skolem tétel.

(D) Rezolúció

1. Nulladrendű klózok, rezolúciós levezetés. Ha $\Gamma \vdash_R \square$ akkor a Γ klózhalmaz kielégíthetetlen.
2. A nulladrendű rezolúciós kalkulus cáfolati teljessége.
3. Egy elsőrendű klózhalmaznak akkor és csak akkor van modellje, ha alappéldányai nulladrendben kielégíthetők (a nyelv egyenlőségmentes és tartalmaz konstanszimbólumot).
4. Az alaprezolúció módszere, helyessége, cáfolati teljessége.

(E) Nemteljességi Tételkör

1. Primitív rekurzív és rekurzív függvények, relációk. Σ_0-formulák, az általuk definiált relációk rekurzívak.

2*. Rekurzívan felsorolható relációk, Σ-formulák és kapcsolatuk. Van rekurzívan felsorolható, nem rekurzív reláció.

3. Ha a Σ formulahalmaz teljes és rekurzív, akkor $Ded(\Sigma)$ rekurzív, ha Σ rekurzívan fel sorolható, akkor $Ded(\Sigma)$ rekurzívan felsorolható. $TH(\mathcal{N})$ nem akxiomatizálható rekurzívan felsorolhatóan.

4*. A Robinson-féle Q axiomarendszer és Σ_0-teljessége.

5. A Rekurzív relációk reprezentálhatók Q-ban.

6* A levezetés aritmetizálása. A diagonalizációs lemma.

7. Gödel első nemteljességi tétele és a Gödel-Rosser tétel.

2023 tavasz.