Régebbi Matek M1 zh-k

**Elemi gráfelméleti tudnivalókkal, fákkal,
Euler- és Hamilton-utakkal/körökkel,
elemi valószínűségszámítási tudnivalókkal
kapcsolatos feladatai.**

Gráfok

1. Igazoljuk, hogy nincs olyan 11 pontú gráf, mely izomorf lenne a komplementumával.

2. Legyen n adott természetes szám, és legyen V az n-hosszú $(0,1)$-sorozatok halmaza. A $\mathcal{G}$ gráf csúcshalmaza V, és két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha (mint sorozatok) 1 helyen térnek el. Mely n értékekre tartalmaz $\mathcal{G}$ Euler-köröket ?

3. Igazoljuk, hogy ha egy n csúcsú gráfnak legalább $\dfrac{n^2-2n+2}{2}$ darab éle van, akkor a gráfban van Hamilton-kör.(Útmutatás: hány éle lehet legfeljebb egy olyan gráfnak, melyre nem teljesül a Dirac-feltétel ?)

4. A G gráf csúcsai az $\{1,2,3,4,5\}$ halmaz 3-elemű részhalmazai; az $a \neq b$ csúcsok között pontosan akkor van él, ha $a \cap b \neq \emptyset$. Igazoljuk, hogy G izomorf K_{10}-el.

5. A legalább 3 csúcsú G gráfra teljesül, hogy tetszőleges csúcsát elhagyva a maradék gráfban van Euler-kör. Igazoljuk, hogy van olyan páros n szám, melyre K_n és G izomorfak.

6. Legyen $A = \{1, 2, ..., 2016\}$. A G gráf csúcsai az $A \times A$ halmaz elemei; az $\langle a, b\rangle$ és $\langle c, d\rangle$ csúcsok között él van, ha $a - c$ nem osztható 3-al, és $b \neq d$. Van-e G-ben Hamilton-kör ?

7. A G gráf csúcsai az $\{1, 2, 3, ..., 2016\}$ halmaz 3-elemű részhalmazai; az $a \neq b$

csúcsok között pontosan akkor van él, ha az a-beli és b-beli számok összege egyaránt páros, vagy egyaránt páratlan. Összefüggő-e a G gráf ?

8. Adjunk példát olyan G gráfra, melyben van Hamilton-kör, de nem teljesül rá az Ore-feltétel.

9. Adjunk példát olyan G gráfra, melyben van Euler-kör, de nincs Hamilton-kör. Indokoljunk.

1. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ egy n-csúcsú fa, akkor

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2n - 2.$$

10. A 2017-reguláris $\mathcal{G}$ gráf komplementuma 2016-reguláris. Igazoljuk, hogy $\mathcal{G}$-ben van Hamilton-kör.

11. A $\mathcal{G}$ gráf csúcsai az $A = \{1, 2, ..., 10\}$ halmaz 2-elemű részhalmazai; az x, y csúcsok között pontosan akkor megy él, ha $|x \cap y| = 1$. Van-e Euler-kör $\mathcal{G}$-ben ? Indokoljunk.

12. Van-e olyan 100-csúcsú $\mathcal{G}$ gráf, hogy $\mathcal{G}$-ben és $\mathcal{G}$ komplementumában is van Euler-kör ? Indokoljunk.

13. Igazoljuk, hogy ha egy $\mathcal{G}$ gráfnak 10 csúcsa és 38 éle van, akkor $\mathcal{G}$-ben van Hamilton-kör.

14. Adjunk példát két, azonos csúcsszámú, 3-reguláris nem izomorf gráfra. Indokoljunk.

15. Igazoljuk, hogy ha egy n-csúcsú $\mathcal{G}$ gráfban minden pont foka legalább $\frac{2}{3}n$, akkor $\mathcal{G}$-ben legalább $\frac{n}{12}$ darab különböző Hamilton-kör van.

16. Van-e olyan 5-pontú fa, mely izomorf a komplementumával? Indokoljunk.

17. Legyenek $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ olyan gráfok, hogy $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$ és $\mathcal{G}_2 \cong \mathcal{G}_3$. Igaz-e, hogy ekkor $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_3$? Indokoljunk.

18. A $\mathcal{G}$ gráf csúcsai az $\{1, 2, 3, ..., 2018\}$ halmaz olyan 3-elemű részhalmazai, melyekben a legnagyobb elem legalább 10; az $a \neq b$ csúcsok között pontosan akkor van él, ha a a és b legnagyobb elemei egyenlőek. Van-e $\mathcal{G}$-ben Euler-kör? Indokoljunk.

19. A Dirac-feltétel ellenőrzésével (vagy bármilyen más módon) igazoljuk, hogy bármely, legalább 6 csúcsú, 3-reguláris gráf komplementuma összefüggő. Indokoljunk.

Valószínűségszámítás

20. Egy piros, és egy kék dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kék kockával dobott szám páros, B pedig azt az eseményt, hogy a dobott számok összege legalább 10. Független-e A és B ?

21. Egy autóbusz munkanapja során 16-szor járja be útvonalát. Egy-egy alkalommal $p = 0,1$ valószínűséggel érkezik késve a végállomására. Adjuk meg annak valószínűségét, hogy egy munkanapja során pontosan 3 alkalommal érkezik késve a végállomására.

22. A $[0, 1]$ valós intervallumban egyenletes eloszlás szerint véletlenül választunk két számot, ξ-t és η-t. Legyen az A esemény az, hogy $\xi + \eta \leq \frac{1}{2}$, a B esemény pedig az, hogy $\xi \leq \frac{1}{4}$. Független-e A és B ?

23. Visszatevés nélkül kiválasztunk 5 számot az $\{1, 2, ..., 90\}$ halmazból. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott számok közül pontosan k olyan lesz, mely osztható 3-al, n olyan lesz, mely 3-al osztva 1-et ad maradékul, és m olyan lesz, mely 3-al osztva 2-t ad maradékul.

24. Egy folyamatosan üzemelő autóbusz útvonala kör alakú. Minden megállóban (egymástól függetlenül) p valószínűséggel szál fel ellenőr. Jelölje ξ azt, hogy az autóbusz hányadik megállása során szál fel az első ellenőr. Számítsuk ki ξ várható értékét.

25. Egy piros és egy kék szabályos dobókockával dobunk egyszerre. Határozzuk meg a dobott számok maximumának várható értékét.

26. A jegyellenőr $0,5$ valószínűséggel ellenőriz férfi, illetve nő utasokat. A férfi utasok (a többi utastól teljesen függetlenül) $0,02$ valószínűséggel bliccelnek; a nők $0,01$ valószínűséggel bliccelnek. Az ellenőr egy műszak alatt 200 utast ellenőriz. Legyen ξ az ellenőr által megtalált bliccelők száma, η pedig a műszak alatt ellenőrzött férfi utasok száma. Határozzuk meg a $P(\xi = n \mid \eta = k)$ feltételes valószínűségeket.

27. A ξ és η valószínűségi változók eloszlása egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a

$$\begin{pmatrix} \xi & 1 \\ \eta & \xi \end{pmatrix}$$

mátrixnak nemnegatív a determinánsa.

29. A ξ és η valószínűségi változók eloszlása egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy $min\{\xi, \eta\} \leq \xi^3$. Indokuljunk.

30. A ξ és η valószínűségi változók eloszlása egyenletes a $[-1, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a $\underline{v} = [1, \xi, \eta]$ vektorra $|\underline{v}| \leq \sqrt{2}$ teljesül (azaz, hogy $\underline{v}$ hossza legfeljebb $\sqrt{2}$).

32. A ξ és η valószínűségi változók eloszlása egyenletes a $[-1, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a $q(x) = x^2 + \xi \cdot x + \eta$ polinomra $q(1) \geq 1$ teljesül.

33. Egy bank-automatától az ügyfelek (egymástól függetlenül) $p = 0,2$ valószínűséggel kérnek számlát a tranzakciójukról. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 1000 ügyfél kiszolgálása után a kiállított számlák száma 170 és 230 között lesz.

34. Egy jegyellenőr (egymástól függetlenül) $p = 0,02$ valószínűséggel talál bliccelő utast.
(a) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 1000 utas ellenörzése után a bliccelők száma 16 és 24 között lesz.
(b) Mi annak a valószínűsége, hogy épp az n.-nek ellenőrzött utas lesz a 2. bliccelő?

35. Egy fagyizóban a vevők egymástól függetlenül, számunkra ismeretlen p valószínűséggel kérnek csokifagyit. Az ismeretlen p értékét úgy próbáljuk meghatározni, hogy megfigyeljük a következő n vevőt, és p-t a csokifagyi-vásárlás relatív gyakoriságával közelítjük. Adjunk becslést n-re, ha azt szeretnénk, hogy közelítésünk legalább 99%-os valószínűséggel legfeljebb $0,05$-el térjen el p tényleges értékétől.