Régebbi Matek M1 zh-k

Folyamfeladatokkal,
Nagy számok törvényével, Centrális Határeloszlás tétellel,
Bernoulli-folyamatokkal
kapcsolatos feladatai.

Gráfok

1-5. Gyakoroljuk konkrét folyamfeladatok optimális folyamainak megkeresését (Ford-Fulkerson algoritmust).

8. A G gráf csúcsai az $\{1, 2, ..., 2016\}$ 3-elemű részhalmazai; az $a \neq b$ csúcsok között pontosan akkor van él, ha $a \cap b \neq \emptyset$.

(a) Hány közös szomszédja van G két nem szomszédos csúcsának ?

(b) Igazoljuk, hogy G bármely csúcspárja között van legalább 18, közös belső pont nélküli út.

10. Igazoljuk, hogy ha a $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ gráf bármely csúcspárja között van legalább 6 darab közös belső pont nélküli út, akkor $3|V| \leq |E|$ (azaz $\mathcal{G}$ éleinek száma nagyobb vagy egyenlő, mint csúcsai számának 3-szorosa).

Valószínűségszámítás

14. Egy bank-automatából az ügyfelek egymástól függetlenül, véletlennek tekinthető összegeket vesznek ki, 100000 (százezer) FT várható értékkel, 20000 (húszezer) FT szórással. A műszak elején az automatába 6 millió FT-ot helyeznek el. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 50.-ként érkezve fel tudunk venni 400000 (négyszázezer) FT-ot (van ennyi a számlánkon).

15. Az előző bank-automatától az ügyfelek (egymástól függetlenül) $p = 0,2$ valószínűséggel kérnek számlát a tranzakciójukról.
(a) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 1000 ügyfél kiszolgálása után a kiállított számlák száma 170 és 230 között lesz.
(b) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy épp az n.-nek érkező ügyfél lesz a 4. olyan, aki számlát kér.

17. Egy jegyellenőr (egymástól függetlenül) $p = 0,02$ valószínűséggel talál bliccelő utast.
(a) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 1000 utas ellenörzése után a bliccelők száma 16 és 24 között lesz.
(b) Mi annak a valószínűsége, hogy épp az n.-nek ellenőrzött utas lesz a 2. bliccelő?

19. Egy fagyizóban a vevők egymástól függetlenül, számunkra ismeretlen p valószínűséggel kérnek csokifagyit. Az ismeretlen p értékét úgy próbáljuk meghatározni, hogy megfigyeljük a következő n vevőt, és p-t a csokifagyi-vásárlás relatív gyakoriságával közelítjük. Adjunk becslést n-re, ha azt szeretnénk, hogy közelítésünk legalább 99%-os valószínűséggel legfeljebb $0,05$-el térjen el p tényleges értékétől.

20. Az előző fagyizóban 25-en állnak sorba; az egyes vevők kiszolgálásához szükséges idők egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók 1 perc várható értékkel, $0,5$ perc szórással. Adjunk becslést annak valószínűségére, hogy a 25. vevőt is kiszolgálják 30 percen belül.

21. Az előző fagyizóban a vevők egymástól függetlenül, $p = 0,3$ valószínűséggel kérnek eperfagyit.
(a) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy az első 5 vevő közül pontosan a 2. és az 5. vevő kér eperfagyit.
(b) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy a 10. vevő lesz a 4. olyan, aki eperfagyit kér.

22. Egy gyorsétteremben korlátlanul lehet üdítőitalt fogyasztani; 6 féle üdítőből lehet választani. A vendégek egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel választanak az üdítők közül. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy nyitás után

(a) Az első 10 vendég közül pontosan 4 választja az első fajta üdítőt;
(b) Pontosan a 10. vendég lesz a 4. olyan, aki az első fajta üdítőt választja.

25. Egy gyorsétteremben a vendégek egymástól függetlenül, véletlennek tekinthető mennyiségű üdítőt isznak, 3 dl várható értékkel, 1 dl szórással. Mennyi annak valószínűsége, hogy a következő 100 vendég együttes üdítő-fogyasztása 32 liter alatt marad ? Indokoljunk.

26. Egy postahivatalban az ügyfelek egymástól függetlenül, 0,3 valószínűséggel akarnak csomagot feladni. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy nyitás után
(a) Az első 20 ügyfél közül legalább 4 akar csomagot feladni;
(b) Pontosan a 25. ügyfél lesz a 6. olyan, aki csomagot akar feladni.

29. Egy 530 méter hosszú utca szélén sorban, egymás mögött 100 autó parkol; az egyes autók által elfoglalt rész valószínűségi változó $5m$ várható értékkel, és $1m$ szórással. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a 101.-nek érkező kisbusz le tud parkolni az utca végén, ha a kisbusznak legalább $10m$ szabad hely kell ($10m$ már elég).

30. Egy autó-szervízbe az ügyfelek $0,25$ valószínűséggel ellenőriztetik a fékeket is. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy
(a) A következő 20 ügyfél közül pontosan 3 ellenőrizteti autója fékjeit is;
(b) Pontosan a 15. ügyfél lesz az 5. olyan, aki ellenőrizteti autója fékjeit is.

33. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, hogy egy adott autószerelő mennyi idő alatt cseréli le a téli gumikat nyáriakra. Tudjuk, hogy ξ várható értéke 30 perc, szórása 10 perc. A téli gumik lecserélésének egységára $5000FT$. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 100 gumicsere után a téli gumik lecserélésére fordított idő alatt munkaóránként legalább 9375 FT bevétele keletkezett az autószerelőnknek.

A sztenderd normális eloszlásfüggvény (Φ függvény) néhány értéke

---

$\Phi(0) = 0,5,\quad \Phi(1) = 0,8413\quad \Phi(2) = 0,9772\quad \Phi(3) = 0,9987,$
$\Phi(4) = 0,9999\quad \Phi(5) = 0,9999$
