Régebbi Matek M1 zh-k

Folyamfeladatokkal, többszörös összefggőséggel, Párosításokkal, Centrális Határeloszlás tétellel, sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatos feladatai.

Gráfok

1-5. Gyakoroljuk konkrét folyamfeladatok optimális folyamainak megkeresését (Ford-Fulkerson algoritmust).

6. Lehet-e egy 2016-szorosan összefüggő G gráfban minden pont foka 2000 ? Indokoljunk.

7.Egy tanszék 16 oktatójának 16 kurzust kell megtartania. E kurzusok közül, minden oktató legalább 8 féle kurzust meg tud tartani, és minden kurzushoz van legalább 8 oktató, akik az adott kurzust meg tudják tartani. Igazoljuk, hogy a 16 oktató beosztható úgy, hogy mindegyikük pontosan 1 kurzust tart meg a 16-ból.

8. A G gráf csúcsai az $\{1, 2, ..., 2016\}$ 3-elemű részhalmazai; az $a \neq b$ csúcsok között pontosan akkor van él, ha $a \cap b \neq \emptyset$.
(a) Hány közös szomszédja van G két nem szomszédos csúcsának ?
(b) Igazoljuk, hogy G legalább 18-összefüggő.

9. Legyen G egy páros gráf, és legyen F a G egy feszített részgráfja. Igaz-e, hogy ha F-ben van teljes párosítás, akkor G-ben is van ? Igaz-e, hogy ha G-ben van teljes párosítás, akkor F-ben is van ?

10. Igazoljuk, hogy ha a $\mathcal{G} = \langle V, E\rangle$ gráf 6-szorosan élösszefüggő, akkor $3|V| \leq |E|$ (azaz $\mathcal{G}$ éleinek száma nagyobb vagy egyenlő, mint csúcsai számának 3-szorosa).

11. Legyen A egy 2016 elemű halmaz, és legyen B az A 2-elemű részhalmazainak hal-

maza. Legyen $\mathcal{G}$ az a páros gráf, melynek csúcshalmaza $A \cup B$ és az $x \in A, y \in B$ pontok pontosan akkor vannak összekötve, ha $x \in y$. Van-e $\mathcal{G}$-ben A-t lefedő párosítás ? Indokoljunk.

12. Legyen $X = \{1, 2, ..., 2017\}$ és álljon az A halmaz az X 2-elemű részhalmazaiból, és B az X 3-elemű részhalmazaiból. Az A és B halmazokon legyen $\mathcal{G}$ a következő páros gráf: ha $x \in A, y \in B$, akkor $\mathcal{G}$-ben $\langle x, y \rangle$ pontosan akkor él, ha $x \subseteq y$. Van-e $\mathcal{G}$-ben A-t lefedő párosítás ? Indokoljunk.

13. Igazoljuk, hogy ha egy 3-reguláris gráf k-szorosan élösszefüggő, akkor k-szorosan összefüggő is. Indokoljunk.

Valószínűségszámítás

14. Egy bank-automatából az ügyfelek egymástól függetlenül, véletlennek tekinthető összegeket vesznek ki, 100000 (százezer) FT várható értékkel, 20000 (húszezer) FT szórással. A műszak elején az automatába 6 millió FT-ot helyeznek el. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 50.-ként érkezve fel tudunk venni 400000 (négyszázezer) FT-ot (van ennyi a számlánkon).

15. Az előző bank-automatától az ügyfelek (egymástól függetlenül) $p = 0,2$ valószínűséggel kérnek számlát a tranzakciójukról.
(b) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy épp az n.-nek érkező ügyfél lesz a 4. olyan, aki számlát kér.

16. Az előző bank-automatához óránként várhatóan 2 olyan ügyfél érkezik, akik kérnek számlát a tranzakciójukról. Adjuk meg annak valószínűségét, hogy
(a) az első olyan ügyfél érkezése után, aki nem kér számlát, a következő 20 percben érkező ügyfelek közül pontosan 3 olyan lesz, aki kér számlát;
(b) az első számlát kérő ügyfél érkezése utáni 20 percben összesen 3 ügyfél érkezik, és ezek egyike sem kér számlát.

17. Egy jegyellenőr (egymástól függetlenül) $p = 0,02$ valószínűséggel talál bliccelő utast.
Mi annak a valószínűsége, hogy épp az n.-nek ellenőrzött utas lesz a 2. bliccelő?

18. Egy menetjegy-árushoz óránként várhatóan 20 ügyfél érkezik, akik közül várhatóan 4-en kérnek bérletet (a többiek jegyet kérnek).
(a) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy az első olyan utas érkezése után, aki bérletet kér, a következő 20 percben érkező utasok közül pontosan 4 olyan lesz, aki jegyet kér;
(b) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy az első jegyet kérő utas érkezése utáni 20 percben összesen 4 utas érkezik, és ezek mindegyike bérletet kér.

20. Egy fagyizóban 25-en állnak sorba; az egyes vevők kiszolgálásához szükséges idők egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók 1 perc várható értékkel, $0,5$ perc szórással. Adjunk becslést annak valószínűségére, hogy a 25. vevőt is kiszolgálják 30 percen belül.

21. Az előző fagyizóban a vevők egymástól függetlenül, $p = 0,3$ valószínűséggel kérnek eperfagyit.
(a) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy az első 5 vevő közül pontosan a 2. és az 5. vevő kér eperfagyit.
(b) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy a 10. vevő lesz a 4. olyan, aki eperfagyit kér.

22. Egy gyorsétteremben korlátlanul lehet üdítőitalt fogyasztani; 6 féle üdítőből lehet választani. A vendégek egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel választanak az üdítők közül. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy nyitás után

(a) Az első 10 vendég közül pontosan 4 választja az első fajta üdítőt;
(b) Pontosan a 10. vendég lesz a 4. olyan, aki az első fajta üdítőt választja.

23. Az előző gyorsétteremben várhatóan óránként 20 műanyag poharat használnak el a vendégek. Adjuk meg annak valószínűségét, hogy a következő 8 órában legfeljebb 150 darab műanyag pohárra lesz szükség.

24. Az előző gyorsétteremben az új (fel nem használt) műanyag poharak 50-es csomagokban vannak. Nyitáskor kibontanak egy ilyen 50-es csomagot. Az előző

feladat adatait használva adjuk meg, hogy várhatóan mennyi idővel később kell a következő 50-es csomagot felbontani.

25. Egy gyorsétteremben a vendégek egymástól függetlenül, véletlennek tekinthető mennyiségű üdítőt isznak, 3 dl várható értékkel, 1 dl szórással. Mennyi annak valószínűsége, hogy a következő 100 vendég együttes üdítő-fogyasztása 32 liter alatt marad ? Indokoljunk.

26. Egy postahivatalban az ügyfelek egymástól függetlenül, 0,3 valószínűséggel akarnak csomagot feladni. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy nyitás után

(a) Az első 20 ügyfél közül legalább 4 akar csomagot feladni;

(b) Pontosan a 25. ügyfél lesz a 6. olyan, aki csomagot akar feladni.

27. Az előző postahivatalban várhatóan óránként 30 ügyfél érkezik. Adjuk meg annak valószínűségét, hogy a következő 8 órában összesen legfeljebb 60 ügyfél ad fel csomagot.

28. Az előző feladatok adatait használva adjuk meg annak valószínűségét, hogy a következő órában egyetlen ügyfél sem akar csomagot feladni.

29. Egy 530 méter hosszú utca szélén sorban, egymás mögött 100 autó parkol; az egyes autók által elfoglalt rész valószínűségi változó $5m$ várható értékkel, és $1m$ szórással. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a 101.-nek érkező kisbusz le tud parkolni az utca végén, ha a kisbusznak legalább $10m$ szabad hely kell ($10m$ már elég).

30. Egy autó-szervízbe az ügyfelek $0,25$ valószínűséggel ellenőriztetik a fékeket is. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy

(a) A következő 20 ügyfél közül pontosan 3 ellenőrizteti autója fékjeit is;

(b) Pontosan a 15. ügyfél lesz az 5. olyan, aki ellenőrizteti autója fékjeit is.

31. Tudjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a következő 5 munkanapon az előző szervízbe érkező ügyfelek egyike sem ellenőrizteti autója fékjeit, $p = e^{-15}$.

(a) Várhatóan hány ügyfél ellenőrizteti autója fékjeit a következő munkanap ?

(b) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy a következő 3 munkanapon legfeljebb

7 ügyfél ellenőrizteti autója fékjeit.

32. Az előző feladatok adatait használva adjuk meg annak valószínűségét, hogy (24 órás munkanapokat feltételezve) a 10. ügyfél érkezése után legfeljebb 2 munkanapot kell várni a következő olyan ügyfél érkezéséig, aki ellenőrizteti autója fékjeit.

33. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, hogy egy adott autószerelő mennyi idő alatt cseréli le a téli gumikat nyáriakra. Tudjuk, hogy ξ várható értéke 30 perc, szórása 10 perc. A téli gumik lecserélésének egységára $5000FT$. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 100 gumicsere után a téli gumik lecserélésére fordított idő alatt munkaóránként legalább 9375 FT bevétele keletkezett az autószerelőnknek.

A sztenderd normális eloszlásfüggvény (Φ függvény) néhány értéke

---

$\Phi(0) = 0,5,$ $\Phi(1) = 0,8413$ $\Phi(2) = 0,9772$ $\Phi(3) = 0,9987,$
$\Phi(4) = 0,9999$ $\Phi(5) = 0,9999$
