Villámkérdések, 2. minta megoldásokkal[1]

1. Számítsuk ki a $v(x, y, z) = [z, x, y]$ függvény rotációját. *2; (Szept 18).*

$$rot(v)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{pmatrix} = [1, 1, 1].$$

2. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$ hatványsor konvergenciasugarát. *6; (Szept. 28).*

A gyökös Hadamard-tétel szerint $r = lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = lim_{n\to\infty} n = \infty.$

3. Irjuk le az Euler-összefüggést. *9; (Okt. 9).*

Tetszőleges z komplex számra $e^{iz} = cos(z) + isin(z)$.

4. Deriválható-e az $f(x + iy) = xy + yi$ komplex függvény? (Indokoljunk.) *10; (Okt. 12).*

$u(x, y) = Re(f) = xy$, $v(x, y) = Im(f) = y$, $\partial_y u(x, y) = x \neq \partial_x v(x, y) = 0$ tehát a Cauchy-Riemann egyeneletek egyetlen pontban sem teljesülnek, így f nem deriválható.

5. Határozzuk meg az $f(z) = \frac{1}{z^2}$ origóban vett reziduumát. *13; (Okt. 26).*

$f(z) = 1\dfrac{1}{z^2} + 0\dfrac{1}{z}$ tehát a reziduum nulla.

6. Adjuk meg a Laplace-transzformált definícióját. *14; (Okt. 30).*

$\mathcal{L}(f; p) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ ha a jobboldali integrál létezik.

7. Legyen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = sin(x)$. Teljesülnek-e f-re a Lipschitz-feltételek? (Indokoljunk.) *15; (Nov. 6).*

$\partial_x f(x, y) = cos(x)$, $\partial_y f(x, y) = 0$. Mivel e parciális deriváltak korlátosak, f-re teljesülnek a Lipschitz-feltételek.

8. Adjuk meg az $y'' - y = xe^x$ egy próbafüggvényét (Indokoljunk.) *19; (Nov. 23).*

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, ennek 1 egyszeres gyöke, így $y_{i,p} = xe^x(Ax + B)$.

[1] A kérdések után *X; (Y,Z)* azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...