Modellelmélet Házi Feladatok
3. Adag

8. Igazoljuk, hogy minden ultraszűrő $\aleph_1$-jó.

9. Igazoljuk, hogy egy végtelen I halmazon $2^{2^{|I|}}$ darab páronként különböző ultraszűrő van. Útmutatás: első lépésként mutassuk meg független függvényeket használva, hogy van $F \subseteq [I]^{2^{|I|}}$ úgy, hogy ha $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1} \in F$ véges sok, páronként különböző halmaz, akkor

$$(\bigcap_{i<n} x_i) \bigcap (\bigcap_{j<m} \overline{y_j}) \neq \emptyset.$$

10. Tartalmazzon az L nyelv megszámlálhatóan végtelen sok 1-változós relációszimbólumot, melyek halmaza legyen $\{R_i : i \in \omega\}$. Ha $x, y \subseteq \omega$ véges, diszjunkt halmazok, akkor legyen

$$\varphi_{x,y} = \exists v((\bigwedge_{i \in x} R_i(v)) \bigwedge (\bigwedge_{j \in y} \neg R_j(v)))$$

és legyen $T = \{\varphi_{x,y} : x, y \subseteq \omega$ véges, diszjunkt $\}$. Adjuk meg a T elmélet egy szaturált modelljét.

11. Tartalmazzon az L nyelv egyetlen kétváltozós relációszimbólumot, mely legyen R. Adjunk meg egy elsőrendű T elméletet, melynek minden modelljében igaz, hogy R egy ekvivalenciareláció, R-nek végtelen sok ekvivalenciaosztálya van, és R minden ekvivalenciaosztálya végtelen. Igazoljuk, hogy a T elmélet $\aleph_0$-kategorikus (azaz izomorfia erejéig pontosan 1 darab megszámlálhatóan végtelen modellje van).

12. Legyen $\mathcal{A}$ egy megszámlálhatóan végtelen struktúra, melyre $TH(\mathcal{A})$ $\aleph_0$-kategorikus, és legyen $\mathcal{B}$ egy tetszőleges, $\mathcal{A}$-val azonos típusú, megszámlálható struktúra. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{B}$ minden végesen generált részstruktúrája beágyazható $\mathcal{A}$-ba, akkor (az egész) $\mathcal{B}$ is beágyazható $\mathcal{A}$-ba.

2013 November.