Modellelmélet Feladatok, 2.

1. Legyen I végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ reguláris ultraszűrő, akkor minden $x \in \mathcal{F}$-re $|x| = |I|$.

2. Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ nemfő ultraszűrő és minden $n \in \omega$-ra legyen A_n egy legalább n-elemű véges halmaz. Igazoljuk, hogy

$$|\prod_{n\in\omega} A_n/\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}.$$

3. Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(J)$ ultraszűrők, akkor definiáljuk $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I \times J)$-t így:

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \{x \subseteq I \times J : \{i \in I : \{j \in J : \langle i, j\rangle \in x\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}\}.$$

Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F}$ valamilyen κ-ra κ-reguláris, akkor $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ egy κ-reguláris ultraszűrő.

4. Legyen T a végpontok nélküli sűrű rendezések elmélete és legyen $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, <\rangle$, ahol $<$ a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazának szokásos rendezése. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ egy κ-reguláris ultraszűrő, akkor T minden legfeljebb κ^+ számosságú modellje beágyazható ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$-ba.

(Nem kell igazolni, de az is megmutatható, hogy elemi beágyazás is van, ezért ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$ valójában κ^{++}-univerzális, tehát "eggyel jobban" univerzális, mint amit a reguláris ultrahatványokkal kapcsolatban tanult tétel állít.)

2019 október 30.