Modellelmélet Feladatok, 3.

1. Legyen $\mathcal{A}$ szaturált struktúra. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.

   (a) $S_v^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ egyelemű.
   (b) $\mathcal{A}$ automorfizmus-csoportja tranzitív.

2. Legyen κ végtelen számosság, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$. Egy $f : \kappa \to \omega$ függvény $\mathcal{F}$ szerint nem korlátos, ha minden $n \in \omega$-ra $\{i \in \kappa : f(i) \geq n\} \in \mathcal{F}$.

   Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F}$ nem megszámlálhatóan teljes, és κ^+-jó, akkor reguláris a következő nagyon erős értelemben: tetszőleges $\mathcal{F}$ szerint nem-korlátos $f : \kappa \to \omega$-hez van $E \subseteq \mathcal{F}$ úgy, hogy $|E| = \kappa$ és minden $i \in \kappa$-ra

$$|\{e \in E : i \in e\}| \leq f(i).$$

3. Legyen λ végtelen számosság. Igazoljuk, hogy λ-n 2^{2^λ} különböző ultraszűrő van. (Útmutatás: függvények egy alkalmasan választott független halmaza segítségével adjunk meg egy $H = \{X_i \subseteq \lambda : i < 2^\lambda\}$ halmazrendszert úgy, hogy minden $S \subseteq H$-ra $S \cup \{\lambda \setminus X : X \in H \setminus S\}$ véges metszet tulajdonságú.)

4. Legyen κ végtelen számosság és $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ egy κ^+-jó, nem megszámlálhatóan teljes ultraszűrő. Igazoljuk, hogy van olyan (végtelen alaphalmazú) $\mathcal{G}$ gráf, mely összefüggő, komplementuma is összefüggő, és $\mathcal{G}$ izomorf ${}^{\kappa}\mathcal{G}/\mathcal{F}$-el.

2019 december.