Modellelmélet Feladatok, 1.

Ha $f : A \to B$ egy függvény, akkor

$$ker(f) \stackrel{Def.}{=} \{\langle u, v\rangle \in A \times A : f(u) = f(v)\}.$$

Ha $\mathcal{A}$ egy struktúra, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ egy ultraszűrő, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I \times I)$ egy szűrő, akkor az ${}^{I}\mathcal{A}/(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ limesz-ultrahatvány az ${}^{I}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ ultrahatványnak az a részstruktúrája, melynek alaphalmaza az

$$\{s/\mathcal{F} : s \in {}^{I}A, \quad ker(s) \in \mathcal{G}\}$$

halmaz.

1. Az előző jelöléseket figyelembe véve lássuk be, hogy az ${}^{I}\mathcal{A}/(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ limesz-ultrahatvány (minden $\mathcal{G}$-re) elemi részstruktúrája az ${}^{I}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ ultrahatványnak.

2. Igazoljuk, hogy minden $\mathcal{A}$-ból induló (akármilyen hosszú) ultralánc izomorf $\mathcal{A}$ egy limesz-ultrahatványával.

3. Igazoljuk, hogy "limesz-ultrahatvány limesz-ultrahatványa" izomorf az eredeti struktúra egy limesz-ultrahatványával, azaz, ha $\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_J$ ultraszűrők I illetve J felett, $\mathcal{G}_I, \mathcal{G}_J$ szűrők $I \times I$ illetve $J \times J$ felett, akkor van olyan K halmaz, $\mathcal{F}_K \subseteq \mathcal{P}(K)$ ultraszűrő és $\mathcal{G}_K \subseteq \mathcal{P}(K \times K)$ szűrő, hogy a

$${}^{J}({}^{I}\mathcal{A}/(\mathcal{F}_I, \mathcal{G}_I)/(\mathcal{F}_J, \mathcal{G}_J) \quad \text{és} \quad {}^{K}\mathcal{A}/(\mathcal{F}_K, \mathcal{G}_K)$$

limesz-ultrahatványok izomorfak.

4. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ struktúráknak az $\mathcal{A}$ struktúra elemi része (de nem tesszük fel, hogy $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ között ezen kívül bármilyen további kapcsolat lenne). Igazoljuk, hogy van olyan $\mathcal{D}$ struktúra, melynek $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mind elemi részstruktúrái.

2025 Március.