

BME TTK Nemsztenderd Analízis Vizsgakérdések, 2012 tavasz

(A) Modellelméleti alapok

1. Ultraszűrő fogalma, létezése, véges halmaz felett minden ultraszűrő fő-ultraszűrő.
2. Struktúrák direkt- és ultraszorzatának definíciója. Loó-lemma.
3. κ -reguláris ultraszűrők és létezésük.
4. Elsőrendben axiomatizálható modellosztályok jellemzése.
5. κ -reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatványok számossága.
6. Legfeljebb κ -s nyelvű struktúrák κ -reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatványai κ^+ -univerzálisak.
7. Diagonális beágyazás, ${}^*\mathbf{R}$ definíciója, végtelen nagy és végtelen kicsi mennyiségek ${}^*\mathbf{R}$ -ben, "végtelen közel van" egy ekvivalencia-reláció, sztenderd rész.

(B) Nemsztenderd Analízis alapjai; (E)-vel együtt választható

8. Konvergens sorozatok nemsztenderd jellemzése. Sorozatok torlódáspontjainak nemsztenderd jellemzése.
9. Minden korlátos sorozatnak van torlódáspontja, illetve kiválasztható belőle konvergens részsorozat.
10. Ramsey tétele megszámlálhatóan végtelen gráfokra. Ebből: minden sorozatnak van monoton részsorozata, minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
11. Függvények folytonosságának, határértékének nemsztenderd jellemzése.
12. Nyílt és zárt halmazok nemsztenderd jellemzése. Korlátos zárt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.
13. Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény felveszi maximumát, minimumát.
14. Bolzano tétele folytonos függvények gyökeiről.
15. Az összegzés, mint lineáris operátor. Kiesler összegzési tétele. Folytonos függvények végtelen finom integrálközelítő-összegei végtelen közel vannak egymáshoz, és a Riemann-integrál értékéhez is.
16. Newton-Leibniz-tétel.
17. A differenciálszámítás alaptétele (folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja az eredeti függvény).
18. A Cauchy-Peano egzisztencia-tétel.

(C) Polinomok

19. Monomok dominálása: két eltérő fokú monom közül valamelyik dominálja a másikat, sőt, sztenderd r -re az $1/r$ -szerese is; $*$ -polinomok rendje.
20. Ha egy $*$ -polinom rendje véges, akkor annyi véges gyöke van, mint a rendje, ha a rend végtelen, akkor végtelen sok véges gyöke van.
21. Montel tétele, és a diszjunkt polinomok tétele.
22. A Hilbert-féle Nullhelytétel: ha $f_1, \dots, f_r, g \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ olyan legfeljebb d -edfokú polinomok, hogy g eltűnik f_1, \dots, f_r összes közös gyökén, akkor van egy csak n -től és d -től függő m szám, hogy g^m benne van az f_1, \dots, f_r által generált ideálban.

(D) Mértékek

23. Számlálómértékek $*$ -véges halmazokon. Dekomponálható, és a közelíthető halmazok, ezek σ -algebrát alkotnak. A Loeb-mérték definíciója véges halmazok ultraszorzatán.
24. A Lebesgue-mérték és a Loeb-mérték kapcsolata.