

## BME TTK Nemsztenderd Analízis Vizsgakérdések, 2014 ősz

### (A) Modellelméleti alapok

1. Ultraszűrő fogalma, létezése, véges halmaz felett minden ultraszűrő fő-ultraszűrő.
2. Véges metszet tulajdonságú halmazrendszerek kiterjeszthetők szűrővé, minden szűrő kiterjeszthető ultraszűrővé. Nem-fő ultraszűrők létezése.
3. Struktúrák direkt- és ultraszorzatának definíciója. Loś-lemma.
4. Kompaktsági tétel.
5. Elsőrendben axiomatizálható modellosztályok jellemzése.
6.  $\kappa$ -reguláris ultraszűrők és létezésük.
7.  $\kappa$ -reguláris ultraszűrők szerinti ultrahatványok számossága.
8. Elemi rész, a diagonális beágyazás elemi beágyazás.
9.  ${}^*\mathbf{R}$  definíciója, végtelen nagy és végtelen kicsi mennyiségek  ${}^*\mathbf{R}$ -ben, "végtelen közel van" egy ekvivalencia-reláció, sztenderd rész.

### (B) Nemsztenderd Analízis alapjai

10. Konvergens sorozatok nemsztenderd jellemzése. Sorozatok torlódáspontjainak nemsztenderd jellemzése.
11. Minden korlátos sorozatnak van torlódáspontja, illetve kiválasztható belőle konvergens részsorozat.
12. Ramsey tétele megszámlálhatóan végtelen gráfokra. Ebből: minden sorozatnak van monoton részsorozata, minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
13. Függvények folytonosságának, határértékének nemsztenderd jellemzése.
14. Nyílt és zárt halmazok nemsztenderd jellemzése. Korlátos zárt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.
15. Bolzano tétele folytonos függvények zérushelyeiről. Korlátos zárt halmazon folytonos függvény felveszi maximumát.
16. Az összegzés, mint lineáris operátor. Kiesler összegzési tétele.
17. A Riemann-integrálhatóság nemsztenderd jellemzése. Folytonos függvények Riemann-integrálhatóak.
18. Newton-Leibniz-tétel.
19. A differenciálszámítás alaptétele (folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja az eredeti függvény).

### (C) Klasszikus Nemsztenderd Analízis és néhány alkalmazás

20. A Cauchy-Peano egzisztencia-tétel.
21. Monom dominálása: két eltérő fokú monom közül valamelyik dominálja a másikat, a dominálás gyenge tranzitivitása monomokon.
22. Ha egy monom dominál egy másikat, akkor sztenderd  $r$ -re az  $1/r$ -szerese is; véges sok tagból álló \*-polinomokban van olyan tag, ami dominálja a többi tag összegét.
23. Ha egy \*-polinomban a domináló tag  $d$  foka véges, akkor (multiplicitással)  $d$  darab véges gyöke van, ha  $d$  végtelen, akkor végtelen sok véges gyöke van.
24. Montel tétele.
25. Diszjunkt polinomok tétele.
26. A variációszámítás legegyszerűbb feladata; ha  $\varphi$  kétszer folytonosan deriválható lokális szélsőértéke  $I(g) = \int_0^1 f(x, g(x), g'(x))dx$ -nek, akkor  $\varphi$  kielégíti az Euler-Lagrange diff.egyenletet.
27. A Hilbert-féle Nullhelytétel: ha  $\mathbf{F}$  algebrailag zárt,  $f_1, \dots, f_r, g \in \mathbf{F}[x_1, \dots, x_n]$  olyan legfeljebb  $d$ -edfokú polinomok, hogy  $g$  eltűnik  $f_1, \dots, f_r$  összes közös gyökén, akkor van egy csak  $n$ -től és  $d$ -től függő  $m$  szám, hogy  $g^m$  benne van az  $f_1, \dots, f_r$  által generált ideálban.