

Rgebbi Logika ZH-k Feladatai

1. Hozzuk prenex-normálformára:

$$\forall xR(x, y) \vee \exists z\neg P(z) \Rightarrow \exists xR(x, x).$$

2 (a). Legyenek f és g egyváltozós függvénytípusú szimbólumok. Formalizáljuk az $\langle f, g; = \rangle$ elsőrendű nyelven, hogy

„ f értékkészlete részhalmaza g értékkészletének és f minden értékét legalább kétszer veszi fel.”

(Az előző mondat második fele azt jelenti, hogy, ha y benne van f értékkészletében, akkor legalább két olyan x_1, x_2 van, melyre $y = f(x_1) = f(x_2)$).

2 (b). Formalizáljuk az alábbi két mondatot a következő elsőrendű nyelven:

$A(x) : x$ autó, $T(x) : x$ trabant,
 $G(x, y) : x$ gyorsabb, mint y , $D(x, y) : x$ drágább, mint y .
„Ha egy autó gyorsabb egy másikonál, akkor drágább is nála.”
„Van olyan autó, amely minden trabantnál gyorsabb.”

3. Alkalmos modell megadásával igazoljuk, hogy

$$\{ \forall x \exists y \exists z (E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge y \neq z) \} \not\models \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow E(x, y)).$$

4. A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy a következő 3 állítás ekvivalens:

- (a) $\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$;
- (b) $\Sigma \vdash \beta \Rightarrow \alpha \Rightarrow \gamma$;
- (c) $\Sigma \cup \{\alpha, \beta, \neg\gamma\}$ ellentmondásos.

5. Hozzuk prenex-normálformára:

$$\forall x(P(x) \vee \exists yQ(x, y)) \Rightarrow \forall xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x, x).$$

6 (a). Formalizáljuk a gráfelmélet nyelvén:

„Minden csúcsnak van olyan szomszédja, mely legalább másodfokú.”

(A gráfelmélet nyelvében $=$ -n kívül csak a kétváltozós E relációsztípusú szimbólum szerepel; $E(x, y)$ jelentése, hogy él megy x és y között. x az y szomszédja, ha megy köztük él; egy csúcs foka pedig a rá illeszkedő élek száma.)

6 (b). Formalizáljuk az alábbi két mondatot a következő elsőrendű nyelven:

$H(x) : x$ hallgató, $K(x) : x$ könyvtári könyv,
 $B(x, y) : x$ kikölcsönzi y -t, $T(x, y) : x$ és y évfolyamtársak.

„Egyetlen hallgató sem kölcsönzi ki az összes könyvtári könyvet.”

„Ha két hallgató pontosan ugyanazokat a könyvtári könyveket kölcsönzi ki, akkor ők évfolyamtársak.”

7. Alkalmas modell megadásával igazoljuk, hogy

$$\{ \forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \Rightarrow P(y, z, x)), \exists x \exists y \exists z (P(x, y, z)) \} \not\models \forall x \forall y \exists z P(x, y, z).$$

8. A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk:

Ha $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ és $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ akkor $\Sigma \vdash \beta$;

Minden választ indokoljunk !