Bevezetés a topológiába

1. Előadás

1. Definíció. *(X, τ) topologikus tér, ha $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ és*

1. *$\emptyset, X \in \tau$,*
2. *$A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,*
3. *Ha $U \subseteq \tau$, akkor $\bigcup U \in \tau$,*

ahol $\bigcup U = \{x : \exists A \in U : x \in A\}$. Ekkor τ topológia X-en, τ elemeit nyílt halmazoknak nevezzük.

1.1. Topologikus tér megadása

Legyen (X, τ) topologikus tér.

2. Definíció.

1. *$B \subseteq \tau$ a τ egy bázisa, ha $(\forall X \in \tau)(\exists U \subseteq B : X = \bigcup U)$*
2. *$S \subseteq \mathcal{P}(X)$ τ szubbázisa, ha $\{A_1 \cap \ldots \cap A_n : A_1, \ldots, A_n \in S, n \in \mathbb{N}\}$ τ egy bázisát adja.*

1. Lemma. *Legyen S tetszőleges. Akkor van olyan topológia, hogy*

1. *$S \subseteq \tau$, S szubbázisa τ-nak, és*
2. *Ha $S \subseteq \tau'$ és τ' topológia, akkor $\tau \subseteq \tau'$.*

(Ekkor τ az S által generált topológia.)

Bizonyítás. Legyen $\tau_0 = \{\emptyset, X\} \cup \{A_1 \cap \ldots \cap A_n : A_1, \ldots, A_n \in S, n \in \mathbb{N}\}$. Legyen $\tau = \{\bigcup U : U \subset \tau_0\}$. Elég belátni, hogy τ-ra teljesülnek az 1. Definíció feltételei:

1. $\emptyset, X \in \tau$ ✓;
3. $\bigcup$-zártság τ konstrukciójából adódik ✓;

2. legyen $U_1, U_2 \subseteq \tau_0$. Mivel a metszetképzés disztributív az unióra nézve, ezért
$$(\bigcup U_1) \cap (\bigcup U_2) = \{A \cap B : A \in U_1 \text{ és } B \in U_2\}.$$
Elég, ha megmutatjuk, hogy $A, B \in \tau_0 \Rightarrow A \cap B \in \tau_0$. Ha A vagy B $\in \{\emptyset, X\}$ ✓. Feltehető, hogy A, B τ_0 második blokkjából való, de ekkor A, B előáll A_i-k megfelelő véges metszeteiként, és így $A \cap B$ is.

□

1.2. Példák topologikus terekre

1. $(X, \mathcal{P}(X))$ topologikus tér, az X feletti ún. *diszkrét*[1] tér.
2. $(X, \{\emptyset, X\})$ topologikus tér, az X feletti ún. *triviális* tér.
3. (X, ρ) metrikus tér. Ha $\epsilon > 0$, akkor $B(a, \epsilon) := \{b \in X : \rho(a, b) < \epsilon\}$. X-en
$$\mathcal{B} = \{B(a, \epsilon) : a \in X, \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$$
egy topológia bázisa, azaz $\tau = \{\bigcup U : U \subseteq \mathcal{B}\}$ egy topológia. Ez pont a ρ szerinti metrikus értelemben nyílt halmazok rendszere.
4. $(X, \leq)$ részbenrendezett halmaz.[2] Ha $a, b \in X$, akkor nyílt intervallum $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. Ezzel
$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in X\}$$
egy topológia bázisa, a kapott topológia a *rendezés*topológia X-en.

1.3. Topologikus terek közötti folytonos függvények

2. Tétel. *Legyen $(X, \rho), (Y, \sigma)$ két metrikus tér. Ekkor ekvivalensek:*

1. $f : X \longrightarrow Y$ (metrikus értelemben) folytonos;

2. ha $U \subseteq Y$ metrikus értelemben nyílt, akkor $f^{-1}(U)$ is nyílt.

Bizonyítás. Ismert. □

3. Definíció. *Legyenek $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topologikus terek. Legyen $f : X \longrightarrow Y$. f folytonos, ha $(\forall U \in \sigma)(f^{-1}(U) \in \tau)$.*

4. Definíció. *(X, τ) és (Y, σ) homeomorf, ha van olyan $f : X \longrightarrow Y$, hogy f bijekció, és mind f, mind f^{-1} folytonos.*

3. Tétel. *Az eddigi jelölésekkel igazak*

1. $f : X \longrightarrow Y$ folytonos $\Leftrightarrow \{f^{-1}(U) : U \in \sigma\} \subseteq \tau$;

2. f homeomorfizmus $\Leftrightarrow \{f^{-1}(U) : U \in \sigma\} = \tau$.

Bizonyítás. 1. ✓;

2. alkalmazzuk 1-et f-re, majd f^{-1}-re.

□

[1] A diszkrét topológiában minden halmaz nyílt, és minden pont izolált.

[2] $(X, \leq)$ részbenrendezett halmaz, ha $\geq$ reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív reláció X-en

1.4. Topológiai bizonyítás végtelen sok prímszám létezésére

5. Definíció. (X, τ) *topologikus tér.* $F \subseteq X$ *zárt, ha* $X \setminus F \in \tau$.

4. Tétel. *Végtelen sok prímszám létezik.*

Bizonyítás. Először $\mathbb{Z}$-n megadunk egy topológiát: ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor legyen

$$N_{a,b} = \{a + k \cdot b : b \neq 0, k \in Z\},$$

azaz az a-ból ,,induló" b differenciájú számtani sorozat elemeinek halmaza.

$\mathcal{B} := \{N_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ egy topológia bázisa. Ehhez először megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}$ tetszőleges két elemének a metszete előáll, mint megfelelő $\mathcal{B}$-beli halmazok uniója. Legyenek N_{a_1,b_1}, N_{a_2,b_2} tetszőlegesek. Vegyük észre, hogy ha $c \in N_{a_1,b_1} \cap N_{a_2,b_2}$, akkor

$$N_{a_1,b_1} = N_{c,b_1} \text{ és } N_{a_2,b_2} = N_{c,b_2},$$

illetve

$$c \in N_{c,b_1 \cdot b_2} \subseteq N_{a_1,b_1} \cap N_{a_2,b_2}.$$

Ezért

$$N_{a_1,b_1} \cap N_{a_2,b_2} = \bigcup_{c \in N_{a_1,b_1} \cap N_{a_2,b_2}} N_{c,b_1 \cdot b_2}.$$

Ha tehát $U_1, U_2 \subseteq \{N_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, akkor a disztributivitás miatt

$$\left(\bigcup U_1\right) \cap \left(\bigcup U_2\right) = \bigcup \{A \cap B : A \in U_1, B \in U_2\}.$$

Így $\mathcal{B}$ tényleg egy τ topológia bázisa.

Ha $U \in \tau$ és $U \neq \emptyset$, akkor U végtelen, mert $U = \bigcup N_{a,b}$ alakú. Továbbá $N_{a,b}$ zárt is, mert

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{c=1}^{b-1} N_{c,b}.$$

Ha $x \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$, akkor van olyan p prím, hogy $x \in N_{0,p}$, ezért

$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p:\text{prím}} N_{0,p}.$$

Ha véges sok prím volna, akkor a jobb oldalon zárt halmazok egy véges uniója lenne, ami szintén zárt, ezért $\{\pm 1\}$ nyílt halmaz, ami ellentmond annak, hogy a nem üres nyílt halmazok végtelenek.

□

1.5. Feladatok

1. Hf. (X, ρ) *metrikus tér.*

$$\rho'(x, y) := \begin{cases} \rho(x, y) & \textit{ha } \rho(x, y) \leq 1, \\ 1 & \textit{különben.} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy ρ' *metrika* X*-en és ugyanazt a topológiát adja meg, mint* ρ.

2. Hf. *,,A topologikus tér felépíthető a zárt halmazokon keresztül is." Lássuk be, ha $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$, olyan hogy*

1. $\emptyset, X \in \rho$;
2. $A, B \in \rho \Rightarrow A \cup B \in \rho$;
3. $U \subseteq \rho \Rightarrow \bigcap U \in \rho$,

akkor $\tau = \{U : X \setminus U \in \rho\}$ egy topológia, és $\rho = \{\tau$ zárt halmazai$\}$.