Topológia 11. előadás

Tóbiás András

2012. május 8.

Homotópiák

A következő fogalmakat érdemes úgy elképzelni, hogy $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$:

1. Definíció. *Legyen (X, τ) és (Y, σ) topologikus tér. Legyenek $f, g : X \to Y$ folytonosak. f és g homotópok egymással, ha*

$$\exists\ h :\ [0,1] \times X\ \to\ Y\ folytonos :$$
$$\forall\ x\ \in X :\ h(0,x) = f(x),\ h(1,x) = g(x).$$

1. Jelölés. *$f \sim g$: f és g homotópok. $f \sim_h g$: f és g homotópiáját h tanúsítja.*

A homotópia tulajdonképpen azt jelenti, hogy h "a $t = 0$ és a $t = 1$ pillanatok között folytonosan átdeformálja f-et g-be".
$\varphi(x) = h(t, x)$ (t rögzített) a deformáció t-edik pillanatában keletkező függvény,
$\psi(t) = h(t, x)$ (x rögzített) az x paraméterű pont pályája.

1. Állítás. *A homotópia ekvivalenciareláció.*

1. Bizonyítás. *A reflexivitás világos: $f \sim f$. A megfelelő homotópia: $h(t, x) = f(x)$.*
Szimmetria: ha $f \sim_h g$, legyen $h'(t, x) = h(1 - t, x)$. Ekkor $g \sim_{h'} h$.
Tranzitivitás: ha $f \sim_{h_1} g$, $g \sim_{h_2} j$, "dupla sebességgel deformáljuk f-et g-be, majd g-t j-ba, végül ezeket fűzzük össze":
legyen

$$h(t,x) = \begin{cases} h_1(2t, x),\ ha\ h\ \leq\ \frac{1}{2} \\ h_2(2t, x),\ ha\ h\ >\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ekkor $f \sim_h g$.

1. Megjegyzés (Állításnak túlzás). *Legyen $X = \{1\}$ egypontú tér!*
(Y, τ) ívszerűen összefüggő $\Leftrightarrow$ $\forall\ f, g :\ X \to Y$ esetén f és g homotópok.

Erre indoklást jelent, hogy f, g formálisan 1-, valójában 0-változósak. Így az $X \times [0, 1]$ direktszorzat tulajdonképpen 1-változós, azaz azonosítható $[0, 1]$-el.

2. Megjegyzés (Teljes trivialitás, bűvészkedés a jelölésekkel.). *Ha $f: X \to Y$ függvény, akkor $f \in Y^X$. Ha (Y, σ) topologikus tér, akkor ez a hatvány automatikusan rendelkezik a szorzattopológiával.*

2. Állítás. *Ha $f, g: X \to Y$, $f \sim g$, akkor f és g Y^X-nek ugyanabban az ívszerűen összefüggő komponensében van.*

2. Bizonyítás. *Ha $f \sim_h g$, akkor legyen $h': [0,1] \to Y^X$.*
$h'(t) = \varphi_t$, ahol $\forall x:\ \varphi_t(x) = h(t,x)$. Ekkor $h'(0) = f$, $h'(1) = g$. Kell még: h' folytonos.
$\forall x \in X$-re legyen $\Pi_x : Y^X \to Y$ az x. projekció: $\Pi_x(f) = f(x)$. Vegyük észre, hogy

$$h'(t) = \varphi_t = (\Pi_x(\varphi_t):\ x \in X).\ (\star)$$

(φ_t mint vektor azonos a koordinátáival.)

$$\Pi_x(\varphi_t) = \varphi_t(x) = h(t, x.)$$

Rögzített x-re ez t-től folytonosan függ, mert h kétváltozós folytonos függvény. A direkt szorzat bevezetésénél meggondoltak szerint $(\star)$ jobb oldala t-től folytonosan függ.

Az előző állítás megfordítása nem igaz: ha f, g Y^X ugyanazon ívszerűen összefüggő komponensében vannak, nem biztos, hogy homotópok.

1. Házi feladat. *Adjunk példát arra, hogy f, g az Y^X ugyanazon ívszerűen összefüggő komponensében vannak, de nem homotópok. Ötlet: tekintsük az*

$$f, g : [0,1] \to \mathbb{R} : f = 0,\ g(x) = 0,\ \text{ha } x\ \leq \frac{1}{2},\ g(x) = 1,\ \text{ha } x > \frac{1}{2}$$

függvényeket.

3. Megjegyzés. *Van arra is példa, hogy két függvény folytonos, egy ívszerűen összefüggő komponensben vannak, de nem homotópok.*

2. Definíció (Emlékeztető). *Legyen (X, τ) topologikus tér, legyen $A \subseteq X$. A egyszeresen összefüggő, ha $\forall f:\ S^1 \to X$, ran $f \subseteq A$ folytonos függvényhez $\exists g:\ B^2 \to X$ folytonos: $g|_{S^1} = f$.*

3. Definíció. *$f : X \to Y$ pontra húzható, ha f homotóp valamely konstans függvénnyel.*

1. Tétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $A \subseteq X$. Ekvivalensek:*

1^0 *A egyszeresen összefüggő,*

2^0 *Ha $f : S^1 \to A$ folytonos, akkor f pontra húzható (minden A-beli zárt görbe pontra húzható).*

3. Bizonyítás. *Feltehetjük, hogy S^1, B^2 origó középpontú, egységsugarú. Polárkoordinátákkal dolgozunk.*
$1^0 \Rightarrow 2^0$: *Tegyük, fel, hogy $A \subseteq X$ egyszeresen összefüggő. Legyen $f : S^1 \to A$ folytonos, kell: f pontra húzható. Legyen $g : B^2 \to A$ folytonos kiterjesztése f-nek. Legyen*

$$h(t, \varphi) = g((1-t)cos\ \varphi, (1-t)sin\ \varphi).$$

(S^1 pontjait azonosítjuk polárkoordinátáikkal.) Világos, hogy h folytonos.

$$h(0, \varphi) = g(cos\ \varphi, sin\ \varphi) = f(\varphi)$$
$$h(1, \varphi) = g(0, 0),\ ez\ \varphi - ben\ konstans!$$

Így f homotópia f és a konstans $g(0, 0)$ függvény között. (Ahogy egyre kisebb sugarú köröket veszünk, a végén egy ponthoz jutunk).
$2^0 \Rightarrow 1^0$: *Legyen $f : S^1 \to A$ folytonos. Kell $g : B^2 \to A$ folytonos, amely kiterjeszti f-et: $g|_{S^1} = f$. 2^0 miatt $\exists h : [0, 1] \times S^1 \to A$ folytonos függvény, hogy*

$$\forall\varphi :\ h(0, \varphi) = f,\ h(1, \varphi) = P,$$

ahol a P pont nem függ φ-től. Legyen

$$g : B^2 \to A,\ g(t\ cos\ \varphi, t\ sin\ \varphi) = h(1-t, \varphi).$$

g folytonos. Kiterjeszti-e f-et?

$$g(1cos\ \varphi, 1sin\ \varphi) = h(0, \varphi) = f(\varphi),$$

ezért $g|_{S^1} = f$.
g jóldefiniált: ha $t = 0$, akkor $g(0\ cos\ \varphi, 0\ sin\ \varphi) = h(1, \varphi)$, ez nem függ φ-től, ezért nem baj, hogy az origónak több polárkoordinátája van. Kész!

2. Tétel (Jordan görbe-tétele, nem bizonyítjuk). *Legyen $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, injektív függvény. $\mathbb{R}^2 \setminus ran f$-nek pontosan 2 db ívszerűen összefüggő komponense van, ezek közül pontosan egy korlátos, ez f belseje.*

3. Állítás. *Ekvivalensek:*

1^0 *$A \subseteq \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő,*

2^0 *Ha $f : S^1 \to A$ folytonos és injektív, akkor f belseje részhalmaza A-nak.*

4. Bizonyítás (Vázlat). $1^0 \Rightarrow 2^0$: *Legyen $f : S^1 \to A$ folytonos, injektív. Ekkor van $g : B^2 \to A$ folytonos: $g|_{S^1} = f$. Megmutatható, hogy $ran\ g = f\ belseje$.*
$2^0 \Rightarrow 1^0$: *Legyen $f : S^1 \to A$ folytonos. Megmutatható, hogy f homotóp egy folytonos injektív f'-vel. 2^0 miatt f belseje $\subseteq A$, $\neq \emptyset$. Ekkor f' és így f is összehúzható f' belsejének tetszőleges pontjára. Kész.*

A fundamentális csoportok elmaradnak, következő órán már a kompaktsággal fogunk foglalkozni. Zárásul egy

1. Érdekes feladvány. *A falba be van verve két szög. Hurkoljuk át a képet tartó fonalat a két szögön úgy, hogy a kép maradjon a falon, de bármelyik szöget kihúzva essen le. (Gyakorlatban megvalósítható eljárást adjunk meg!)*