1. Kompaktság

Ebben a fejezetben a topologikus terek kompaktságával kapcsolatban mutatunk meg néhány alapvető eredményt. Kezdésképp definiálunk néhány alapvető fogalmat.

1.1. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $U \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

- *U az X tér egy* fedése*, ha $\bigcup U = X$;*
- *U az X tér egy* nyílt fedése*, ha fedés és U nyílt halmazokból áll, azaz $U \subseteq \tau$;*
- *U az X tér egy* véges fedése*, ha fedése és számossága véges: $|U| < \infty$.*

1.2. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $U \subseteq \mathcal{P}(X)$. U halmazrendszer* véges metszet tulajdonságú *vagy* centrált*, ha $\forall n \forall A_1, \ldots A_n \in U$-ra $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$.*

Egy véges metszet tulajdonságú halmazrendszert gyakorta FIP (Finite Intersecion Property) halmazrendszernek hívunk.

1.3. Definíció. *Egy (X, τ) topologikus tér* kompakt*, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható egy véges fedés. (X, τ)* Lindelöf-tér*, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható megszámlálható fedés.*

1.1. Állítás. *Kompakt tér folytonos képe kompakt, illetve Lindelöf-tér folytonos képe is Lindelöf-tér.*

Bizonyítás. Mivel a két állítás bizonyítása gyakrolatilag ugyanazon a gondolatmeneten alapul, így csak a kompakt terekre vonatkozó állítást látjuk be.

Legyenek (X, τ), (Y, σ) topologikus terek, X kompakt, valamint legyen $f : X \longrightarrow Y$ folytonos függvény. Adott továbbá U, az Y tér egy nyílt fedése.

Legyen $V = \left\{ f^{-1}(A) : A \in U \right\}$. V halmaz elemei nyíltak f folytonossága miatt, sőt V egy fedése X-nek, hiszen $Dom(f) = X$. X kompaktsága miatt kiválasztható V-ből egy $V_0 \subseteq V$ véges fedés. Az $U_0 = \{f(A) : A \in V_0\} \subseteq U$ halmaz természetesen véges, és fedi Y-t, mert V_0 fedi X-et. $\square$

1.4. Definíció. *(X, τ) topologikus tér, $A \subseteq X$ halmaz* kompakt*, ha az (A, τ_A) tér kompakt, ahol τ_A az A részhalmaz altértopológiája.*

1.1. Tétel. *(X, τ) topologikus térre a következő állítások ekvivalensek:*

(1) (X, τ) *kompakt;*

(2) Ha $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ *zárt halmazokból álló FIP halmazrendszer, akkor* $\bigcap U \neq \emptyset$.

Bizonyítás. A tétel állításának jelöléseit használjuk.

– $(1) \Rightarrow (2)$

Feltesszük, hogy $\bigcap U = \emptyset$.

Legyen $V = \{X - A : A \in U\} \subseteq \tau$. V rendszer lefedi X-et, mert $X - \bigcup V = \bigcap U = \emptyset$. Ekkor - kihasználva, hogy X kompakt - van $V_0 \subseteq V$ véges fedése X-nek.

V definíciójához hasonlóan legyen $U_0 = \{X - A : A \in V_0\}$, amelyre $\bigcap U_0 = X - \bigcup V_0 = \emptyset$, így ellentmondásra jutunk, hiszen U_0 nem lehet üres U véges metszet tulajdonsága miatt.

– $(2) \Rightarrow (1)$

Legyen V olyan nyílt fedése X-nek, hogy egyetlen véges részfedése sem fedi X-et. $U = \{X - A : A \in V\}$ zárt halmazok FIP rendszere, ugyanis egy $U_0 \subseteq U$ véges halmazra $\bigcap U_0 = X - \bigcup V_0 \neq \emptyset$, ahol $V_0 = \{X - A : A \in U_0\}$ nem lehet X fedése, mert véges.

Ekkor van $a \in \bigcap U$, azaz $a \in X - \bigcap V$, ami nem lehetséges, hiszen V fedése X-nek.

□

1.5. Definíció. (X, τ) *topologikus tér,* $A \subseteq X$.

$a \in X$ torlódik *A-hoz, ha* $a \in cl(A)$*, azaz, ha* $a \in G \in \tau$*, akkor* $G \cap A \neq \emptyset$.

$a \in X$ *az A halmaz* teljes felhalmozódási pontja*, ha* $\forall a \in G \in \tau$*-ra* $|G \cap A| = |A|$.

A következő tétel a kompaktság egy ekvivalens megfogalmazását adja.

1.2. Tétel. *Adott* (X, τ) *kompakt topologikus tér. Ekkor ha* $A \subseteq X$ *számossága megszámlálhatóan végtelen, akkor A halmaznak létezik teljes felhalmozódási pontja.*

A tétel általánosabb formájában is igaz: a kompaktság ekvivalens azzal, hogy ha A számossága tetszőleges végtelen, akkor létezik A-nak teljes felhalmozódási pontja.

Bizonyítás. Rögzítsük A egy felsorolását: $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Legyen $B_n = \{a_m : m \geq n\}$. Természetesen $\langle cl(B_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ zárt halmazok FIP rendszere, hiszen B_n halmazok egymásba ágyazottak. Korábban láttuk, hogy a kompaktság ekvivalens azzal, hogy zárt halmazok FIP rendszerének metszete nemüres halmaz, tehát létezik $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(B_n)$. Megmutatjuk, hogy a teljes felhalmozódási pontja A-nak.

Legyen $a \in G \in \tau$ tetszőleges. Ekkor $G \cap B_n \neq \emptyset$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, hiszen ellenkező esetben $B_n \subseteq X - G$, sőt $cl(B_n) \subseteq X - G$, kihasználva, hogy $X - G$ zárt. Mivel $a \in G \cap cl(B_n)$, ez ellentmondás, tehát $G \cap B_n$ nemüres.

A következőben belátjuk, hogy $G \cap B_n$ halmaz nemcsak nemüres, hanem végtelen számosságú is. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén megadunk pontok egy végtelen sorozatát, amely $G \cap B_n$ elemeiből áll.

Rögzítsük $a_0 \in G \cap B_n$ első elemet. Ha $i_0 < \cdots < i_m$ definiált úgy, hogy $\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_m}\} \subseteq B_n \cap G$, akkor $a_{i_{m+1}}$ legyen $G \cap B_{i_m+1}$ tetszőleges eleme. Ezzel $\{a_{i_k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq B_n \cap G$. Mivel $A = B_0$, így $A \cap G$ is végtelen számosságú.

$\square$

1.1. Kompaktság metrikus térben

1.6. Definíció. *Adott (X, ρ) metrikus tér* sorozatkompakt*, ha minden X-ben futó sorozatnak van konvergens részsorozata.*

1.7. Definíció. *$\epsilon > 0$-ra $A \subseteq X$* ϵ-háló*, ha $X = \bigcup_{a\in A} B(a, \epsilon)$.*

A következő tételben az előbbi két definíciót kapcsoljuk össze eddigi vizsgálatainkkal.

1.3. Tétel. *Legyen (X, ρ) metrikus tér. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) X kompakt;

(2) X sorozatkompakt;

(3) X teljes metrikus tér és minden $\epsilon > 0$-hoz létezik X-ben véges ϵ-háló.

Bizonyítás. Ciklikusan bizonyítjuk az ekvivalenciát.

– $(1) \Rightarrow (2)$

Legyen $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ X-beli sorozat. Ha a sorozat, mint $\mathbb{N} \to X$ függvény véges értékkészletű, úgy van konstans részsorozata.

Tegyük fel tehát, hogy a_n értékkészlete végtelen. Ekkor van az $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak teljes felhalmozódási pontja: legyen ez b.

Legyen i_0 tetszőleges. Amennyiben $i_0 < \cdots < i_m$ értéke ismert, és teljesül minden $j \leq m$ esetén, hogy $\rho(a_{i_j}, b) \leq \frac{\rho(a_0, b)}{j}$, akkor $a_{i_{m+1}}$ értékét úgy válassszuk meg a sorozat tagjai közül, hogy a következő teljesüljön:

$$a_{i_{m+1}} \in B\left(b, \frac{\rho(a_{i_0}, b)}{m+1}\right)$$

Mivel b a sorozat teljes felhalmozódási pontja, egy tetszőleges nyílt környezetében a sorozatnak végtelen sok eleme található meg, így $a_{i_{m+1}}$ megválasztására is végtelen sok lehetőségünk van.

Világos, hogy $\langle a_{i_n} : n \in \mathbb{N}\rangle$ sorozat konvergens és b-hez konvergál.

– (2) $\Rightarrow$ (3)

Először megmutatjuk X teljességét, majd indirekt belátjuk az ϵ-háló létezését is.

Legyen a_n Cauchy-sorozat, legyen ennek a_{i_n} egy konvergens részsorozata és $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = b$.

Rögzítsük $\epsilon > 0$ értékét tetszőlegesen.

- a_{i_n} konvergenciája miatt ekkor létezik m, hogy minden $n \geq m$-re $\rho(a_{i_n}, b) < \frac{\epsilon}{2}$.
- a_n Cauchy-sorozat, tehát létezik N, hogy minden $k, l \geq N$-re $\rho(a_k, a_l) < \frac{\epsilon}{2}$.

Legyen $M = \max\{i_m, N\}$. Ekkor minden $j > M$-re

$$\rho(a_j, b) \leq \rho(a_j, a_{i_m}) + \rho(a_{i_m}, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

.

Mivel ϵ tetszőleges volt, így a sorozat konvergens.

Tegyük fel indirekt, hogy adott $\epsilon > 0$-hoz nem létezik ϵ-háló. Konstruálunk egy sorozatot, melynek első $a_0 \in X$ eleme testszőleges, továbbá ha már adottak $a_0, \ldots, a_n \in X$ elemek úgy, hogy $\rho(a_i, a_j) > \epsilon$ minden $i, j \leq n$-re, akkor $B = \bigcup_{j \leq n} B(a_j, \epsilon)$ nem lehet X-nek fedése, hiszen ez egyben ϵ-háló is lenne.

Tehát $X - B$ nemüres, így megválasztható a következő elem: $a_{n+1} \in X - B$ tetszőleges.

Mivel a_{n+1} olyan elem, amely minden előzőtől legalább ϵ távolságra helyezkedik el, így $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ sorozatnak nemhogy konvergens, de Cauchy részsorozata sem létezik. Ellentmondásra jutottunk, azaz létezik ϵ-háló.

– $(3) \Rightarrow (1)$

Minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen A_n egy véges $\frac{1}{2^n}$-háló, továbbá legyen $U \subseteq \subseteq \tau$ egy nyílt fedése X-nek, melyre indirekt feltszzük, hogy nincs véges részfedése.

Megadunk egy X-beli a_n sorozatot úgy, hogy $a_i \in A_i$ és $B(a_i, 2^{-i})$-t U-nak egyetlen véges része sem fedi.

- Mivel $X = \bigcup_{a \in A_1} B(a, 1)$ és A_1 véges, ezért van olyan $a_1 \in A_1$, hogy $B(a_1, 1)$-et U egyelten véges része sem fedi le.
- Tegyük fel, hogy $a_1, \ldots, a_n$ adottak úgy, hogy $a_i \in \in A_i$ és $B(a_i, 2^{-i})$-t U-nak egyetlen véges része sem fedi le, továbbá $\rho(a_i, a_{i+1}) \leq 2^{-(i+1)}$. Legyen $C = \left\{ a \in A_{n+1} : \rho(a_n, a) \leq 3/2^{(n+1)} \right\}$. Ekkor igaz, hogy

  $$B(a_n, 2^{-n}) \subseteq \bigcup_{a \in c} B(a, 2^{-(n+1)}).$$

  Ekkor van olyan $a \in C$, hogy $B(a, 2^{-(n+1)})$ nem fedhető le U egyetlen véges részével sem, hiszen ellenkező esetben $B(a_n, 2^{-n})$ lefedhető lenne véges sok U-beli halmazzal, hiszen C is véges. Legyen a_{n+1} egy ilyen C-beli elem.

Ha $n > m$, akkor $\rho(a_n, a_m) \leq 3/2^m$, amiből látszik, hogy a_n sorozat Cauchy. Mivel X teljes, így az (a_n) sorozat konvergens is; legyen $b = \lim_{n \to \infty} a_n$. Mivel U a $(3) \Rightarrow (1)$ irány elején rögzített nyílt fedés, létezik $A \in U$ és $\epsilon > 0$, hogy $B(b, \epsilon) \subseteq A$. Mivel (a_n) b-hez konvergál, van olyan N, hogy minden $m > N$-re $\rho(a_m, b) < \epsilon/2$ teljesül. Válasszuk m-et úgy, hogy egyszerre teljesüljön $m > N$ és $1/2^m < \epsilon/2$. Ekkor $B(a_m, 1/2^m) \subseteq A$, azaz $B(a_m, 1/2^m)$-et U egyetlen eleme is lefedi - ami a konstrukciónk miatt lehetetlen. Ez az ellentmondás igazolja az állításunkat.

$\square$