2. előadás

Környezetek

Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $a \in X$, $N \subset X$. N környezete a-nak, ha $\exists U \in \tau$, amire $a \in U \subset N$.*

Definíció. *$B_a \subset \mathcal{P}(X)$ az a pont környezetbázisa, ha*

(i) $\forall a$-ra B_a környezete a-nak,

(ii) ha N környezete a-nak, akkor $\exists M \in B_a$, amire $M \subset N$.

Definíció. *$f : X \to Y$ folytonos $a \in X$-ben, ha $\forall N$-re, ami környezete $f(a)$-nak, $f^{-1}(N)$ környezete a-nak.*

Állítás. *Az alábbiak ekvivalensek:*

(i) f folytonos a-ban,

(ii) ha $B_{f(a)}$ környezetbázisa $f(a)$-nak, akkor $\forall N \in B_{f(a)}$-re $f^{-1}(N)$ környezete a-nak.

Bizonyítás. Mindkét irányt bizonyítanunk kell:

a) *(i)* $\to$ *(ii)* Ha $N \in B_{f(a)}$, akkor N környezete $f(a)$-nak. Ebből *(i)* alapján $f^{-1}(N)$ környezete a-nak.

b) *(ii)* $\to$ *(i)* Legyen N környezete $f(a)$-nak. Ekkor $\exists M \in B_{f(a)}$, hogy $M \subset N$. *(ii)* alapján $f^{-1}(M)$ környezete a-nak, vagyis $\exists U \subset f^{-1}(M)$, $U \in \tau$. Ekkor $U \subset f^{-1}(N)$, vagyis $f^{-1}(N)$ is környezete a-nak.

$\square$

Tétel. *(X, τ) és (Y, σ) topologikus terek között ható f függvényekre: f folytonos $\Leftrightarrow$ f X minden pontjában folytonos.*

Bizonyítás. Megint két részben bizonyítunk:

a) Tegyük fel, hogy f folytonos. Legyen $a \in X$ tetszőleges, valamint N környezete $f(a)$-nak. Ekkor $\exists M \in \tau$, amire $M \subset N$, és $f(a) \in M$. Mivel f folytonos, ezért $f^{-1}(M)$ nyílt és $a \in f^{-1}(M)$, tehát $f^{-1}(M)$ környezete a-nak.

b) Tegyük fel, hogy f X minden pontjában folytonos. Legyen $U \in \sigma$ nyílt halmaz. Azt kell belátnunk, hogy $f^{-1}(U) \in \tau$. Mivel f minden X-beli pontban folytonos, így folytonos $f^{-1}(U)$ pontjaiban is. Ezért minden $i \in f^{-1}(U)$-hoz van olyan $V_i \in \tau$ nyílt halmaz, melyre $i \in V_i \subseteq f^{-1}(U)$ (hiszen U környezete $f(i)$-nek). Ekkor $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in f^{-1}(U)} f^{-1}(V_i)$, ami nyíltak uniója, vagyis nyílt.

$\square$

Térkonstrukciók

Definíció. *Legyen (X,τ) topologikus tér, valamint $Y \subset X$. A topológia megszorítását Y-ra az alábbi módon értelmezzük: $\tau|_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$.*

Állítás. *$\tau|_Y$ topológia.*

Bizonyítás. Először is, Y és $\emptyset$ benne vannak $\tau|_Y$-ban, hiszen $Y = X \cap Y$ és $\emptyset = Y \cap \emptyset$ és $X, \emptyset \in \tau$.
Ha $U, V \in \tau|_Y$, akkor $\exists a, b \in \tau$, hogy $U = a \cap Y$, $V = b \cap Y$. Ekkor $U \cap V = (a \cap b) \cap Y$, ezért $U \cap V \in \tau|_Y$.
Ha $\forall i \in I$-re $U_i \in \tau|_Y$, akkor $\forall i$-re $\exists a_i \in \tau$, hogy $U_i = a_i \cap Y$. Ezek uniója: $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = \bigcup\limits_{i\in I}(a_i \cap Y) = Y \cap (\bigcup\limits_{i\in I} a_i)$. $(\bigcup\limits_{i\in I} a_i)$ pedig τ-beli, így $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ is $\tau|_Y$-beli. □

Definíció. *$(Y, \tau|_Y)$ az (X,τ) Y-hoz tartozó altere.*

Állítás. *Legyen (X,τ) topologikus tér, valamint $Y \subset X$ és σ topológia Y-on. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\sigma = \tau|_Y$

(ii) tartalmazás szerint σ a legszűkebb olyan topológia, amelyen $\mathrm{id} : Y \to X$ *folytonos.*

Bizonyítás. A $(ii) \to (i)$ állítás könnyen adódik, így csak $(i) \to (ii)$-t részletezzük. Legyen $U \in \tau$ tetszőleges. Ha id folytonos, akkor $\mathrm{id}^{-1}(U) = U \cap Y \in \sigma$, tehát ha id folytonos, akkor $\tau|_Y \subset \sigma$. Ebben id folytonos. □

Definíció. *Legyen $(X_i, \tau_i), (i \in I)$ topologikus terek sorozata. A terek direktszorzatán a $(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau)$ teret értjük, ahol τ az a topológia, melynek bázisa: $B = \{\prod\limits_{i\in I} U_i : \forall i\ U_i \in \tau_i \wedge \forall i \in I\ U_i = X_i$ véges sok kivétellel$\}$. Ezt a bázist a direktszorzat kanonikus (természetes) bázisának nevezzük.*

Állítás. *B topológia bázisa.*

Bizonyítás. Ehhez elég azt megmutatni, hogy véges metszetre zárt. Ez pedig teljesül, ugyanis B-beli elemek véges metszetében is véges sok helyen szorítjuk meg X_i-t valamely nyílt részhalmazára. □

Állítás. *Az előző definíció jelöléseit megtartva, legyen $\pi_i : \prod\limits_{j\in I} X_j \to X_i$ az i-edik projekció. Ekkor:*

(i) $\forall i$-re π_i folytonos,

(ii) τ a legkisebb topológia (tartalmazás szerint), melyre (i) teljesül.

Bizonyítás. (i) Legyen $U \in \tau_i$. Ekkor $\pi_i^{-1}(U) = \prod\limits_{j\in I, j\neq i} X_j \times U_i \in \tau$, vagyis nyílt halmaz ősképe nyílt, így π_i folytonos.

(*ii*) Legyen σ olyan topológia a direktszorzaton, melyben minden π_i folytonos és legyen $i \in I$ rögzített. A célunk megmutatni, hogy $\tau \subset \sigma$.
Ha π_i folytonos σ-ról τ_i-re, akkor $\forall U \in \tau_i$-re: $X_1 \times X_2 \times \ldots \times U \times X_j = \prod\limits_{i \neq j} X_i \times U \in \sigma$. Mivel σ véges metszetre zárt, ezért τ kanonikus bázisa részhalmaza σ-nak; emiatt $\tau \subset \sigma$.

$\square$

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\forall i \in I$*-re* $\exists f_i : (Y, \sigma) \to (X_i, \tau_i)$ *folytonos függvény. Ekkor* $\exists g : Y \to (\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau)$ *folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $g : Y \to \prod\limits_{i \in I} X_i$, $g(a) = \langle f_i(a) : i \in I \rangle$.
Elegendő azt megmutatnunk, hogy g tetszőleges $a \in Y$-ban folytonos; rögzítsünk egy ilyen a-t és $g(a)$ egy N környezetét. Mivel N környezet, ezért $\exists U \in \tau : g(a) \in U \subset N$.
U a kanonikus bázis egy eleme, ezért így írható: $U = X_i \times \ldots \times U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_n} \times X_j \ldots$.
Az $f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}), f_{i_2}^{-1}(U_{i_2}), \ldots, f_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ halmazok mind nyíltak és a mindnek eleme.
Ezért $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} f_{i_k}(U_{i_k}) \subset g^{-1}(N)$. Tehát $g^{-1}(N)$ környezete a-nak. $\square$

Feladatok

1. Legyen (X, τ) és (Y, σ) két topologikus tér, valamint $A \subset X$ és $B \subset Y$. Lássuk be, hogy $\tau_{X \times Y}|_{A \times B} = \tau|_A \times \sigma|_B$.
   Ötlet: lássuk be, hogy a $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau|_A, V \in \sigma|_B\}$ *mindkét topológiának bázisa.*

2. Legyen szintén (X, τ) és (Y, σ) topologikus terek, valamint W bázis τ-ban és Z bázis σ-ban. Lássuk be, hogy a $\{U \times V : U \in W, V \in Z\}$ bázisa $\tau \times \sigma$-nak.