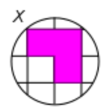
3. Előadás

1. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér, és legyen E ekvivalenciareláció X-en. Ekkor X/E jelöli az E ekvivalenciaosztályait, és ha $a \in X$, akkor a/E az a-nak E szerinti ekvivalenciaosztálya.*

2. Definíció. *(X, τ) E szerinti faktora az az $(X/E, \rho)$ tér, ahol $\forall U \subseteq X/E$-re $U \in \rho \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \bigcup\limits_{a/E \in U} \{a/E\} \in \tau$ (nyílt).*



Legyen $q : X \to X/E$, $q(a) = a/E$, ezt természetes leképezésnek is szokás nevezni.

1. Állítás. *ρ a legnagyobb olyan topológia X/E-n, melyre q folytonos.*

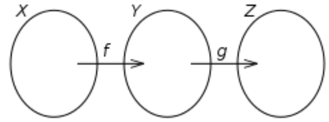
Bizonyítás. $U \in \rho \Leftrightarrow q^{-1}(U) \in \tau$. Ezért q folytonos és ha σ valódi bővítése τ-nak, akkor q nem folytonos (τ, σ) szerint, mert $\exists U \in \sigma : q^{-1}(U) \notin \tau$. □

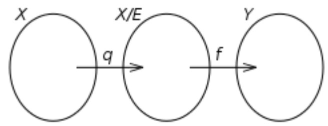
2. Állítás.

1. *Ha $f : (X, \tau) \to (Y, \rho)$, $g : (Y, \rho) \to (Z, \sigma)$ folytonosak, akkor $g \circ f$ is folytonos.*
2. *Legyen E az X-en értelmezett ekvivalenciareláció. Ha $f : (X/E, \rho) \to (Y, \tau)$ folytonos, akkor $f \circ q$ is folytonos.*

Bizonyítás.

1. Legyen $U \in \sigma$, ekkor $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1} \circ g^{-1}(U)$, ahol $g^{-1}(U) \in \rho$ nyílt, mert g folytonos. Így $f^{-1} \circ g^{-1}(U) \in \tau$, hiszen feltettük, hogy f folytonos.



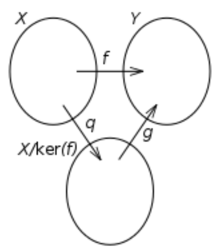


2. q folytonos, és 1. miatt $f \circ q$ is az.

$\square$

3. Definíció. *Legyen* $f : (X, \tau) \to (Y, \rho)$ *folytonos. Ekkor* $\ker(f) = \{(a, b) \in X^2 : f(a) = f(b)\}$ *az* f *magja.*

3. Állítás. *Van olyan injektív folytonos* $g : X/\ker(f) \to Y$*, melyre* $f = g \circ q$*.*



Bizonyítás. X/E elemein f konstans, ezért a $g(a/E) = f(a)$ jól definiálja g-t, és ez tényleg injektív. Ekkor $f = g \circ q$ nyilvánvalóan fennáll. Továbbá, ha $U \in \rho$, akkor $f^{-1}(U)$ nyílt, mert f folytonos, és $\cup g^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, ezért $g^{-1}(U)$ nyílt halmaz a faktortopológiában.

$\square$

Megjegyzés. *Van olyan* $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *folytonos bijekció, melyre* f^{-1} *nem folytonos. Legyen például* X *tetszőleges,* $|X| \geq 2$*, legyen* τ *a diszkrét topológia, és* σ *a triviális topológia* X*-en. Legyen* $f : X \to X$*,* $f = id$*, ez bijekció és folytonos is, de* f^{-1} *nem folytonos.*

Megjegyzés. *Borel halmaz injektív folytonos képe is Borel halmaz.*

4. Definíció. *Legyen* (X, τ) *topologikus tér, és legyen* $A \subseteq X$*.*

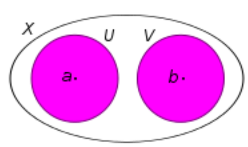
- $\mathrm{cl}(A) = \bigcap\{F \subseteq X : A \subseteq F$ *zárt*$\}$. *Ezt A lezártjának nevezzük, és ez a legkisebb A-t tartalmazó zárt halmaz.*
- $\mathrm{int}(A) = \bigcup\{G \subseteq X : G \subseteq A, G \in \tau\}$. *Ezt A belsejének nevezzük, ez A-nak a legnagyobb nyílt részhalmaza.*
- *Azt mondjuk $A \subseteq X$ sűrű, ha* $\mathrm{cl}(A) = X$.
- $\mathrm{d}(X, \tau) = \min\{|A| : A \subseteq X$*: sűrű*$\}$ *az X sűrűsége.*
- *Az (X, τ) topologikus tér szeparábilis, ha van benne megszámlálható sűrű halmaz, azaz* $\mathrm{d}(X, \tau) = \aleph_0$.
- $\mathrm{w}(X, \tau) = \min\{|B| : B \subseteq \tau$ *bázis*$\}$ *az X súlya.*

5. Definíció. *(X, τ) topologikus tér első megszámlálható (M1) tér, ha minden pontnak van megszámlálható környezetbázisa, második megszámlálható tér (M2), ha* $\mathrm{w}(X, \tau) = \aleph_0$. *M2 $\Rightarrow$ M1.*

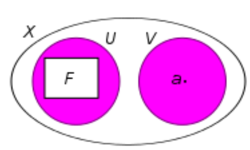
3.1. Szétválasztási axiómák

6. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér.*

- *T_0: $\forall a \neq b \in X\ \exists U \in \tau : a \in U, b \notin U$, vagy fordítva: $a \notin U, b \in U$.*
- *T_1: $\forall a \neq b \in X\ \exists U \in \tau : a \in U, b \notin U$.*
- *T_2 (Hausdorff tulajdonság): $\forall a \neq b \in X\ \exists U, V \in \tau : a \in U, b \in V$, $U \bigcap V = \emptyset$.*



- *T_3 (regularitás): T_1 teljesül, és ha $F \subseteq X$ zárt, $a \in X \setminus F$, akkor van olyan $U, V \in \tau$: $F \subseteq U$, $a \in V$, és $U \bigcap V = \emptyset$.*



- *T_4 (normális): T_1 teljesül, és ha F, G zártak, valamint $F \bigcap G = \emptyset$, akkor $\exists U, V \in \tau$: $U \bigcap V = \emptyset$, $F \subseteq U, G \subseteq V$.*

Megjegyzés. *$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, azonban egyik implikáció sem fordítható meg. Ezek közül $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ nyilvánvaló, a másik két implikáció igazolását néhány sorral lejjebb találjuk.*

4. Állítás. *Ha (X, τ) T_0, akkor $|X| \leq 2^{\mathrm{w}(X)}$.*

Bizonyítás. Legyen $B \subseteq \tau$ olyan bázis, amelyre $|B| = \mathrm{w}(X)$, és legyen $f : X \to \mathcal{P}(B)$, $f(a) = \{U \in B : a \in U\}$. Ekkor f injektív, mert $X : T_0$, ezért $|X| \leq |\mathrm{ran}(f)| \leq |\mathcal{P}(B)|$. $\square$

5. Állítás. *$(X, \tau) : T_1 \Leftrightarrow \forall a \in X : \{a\}$ zárt.*

Bizonyítás.

$\Rightarrow$: $\forall b \in X \setminus \{a\}\ \exists U_b \in \tau$: $a \notin U_b, b \in U_b$, ezért $X \setminus \{a\} = \bigcup\limits_{b \in X \setminus \{a\}} U_b$.

$\Leftarrow$: Ha $a \neq b$ akkor $X \setminus \{b\}$ nyílt, és $a \in X \setminus \{b\}$, $b \notin X \setminus \{b\}$. $\square$

Megjegyzés.

$T_4 \Rightarrow T_3$ bizonyítása: Ha F zárt, és $a \in X \setminus F$, akkor $\{a\}$ is zárt. Ekkor T_4 alkalmazható.

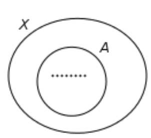
$T_3 \Rightarrow T_2$ bizonyítása: Ha $a \neq b \in X$, akkor $\{a\}$ zárt, így T_3 alkalmazható.

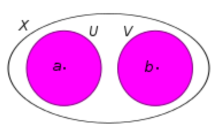
6. Állítás. *Ha (X, τ) Hausdorff, akkor $|X| \leq 2^{2^{\mathrm{d}(X)}}$.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq X$ olyan sűrű, amelyre $|A| = \mathrm{d}(X)$.

Legyen $f(a) = \{B \subseteq A : a \in \mathrm{cl}(B)\}$. f injektív, mert ha $a \neq b$, akkor van $U, V \in \tau$: $U \bigcap V = \emptyset$, $a \in U, b \in V$. Ezért például $A \bigcap U \in f(a)$, hiszen $\mathrm{cl}(A \bigcap U) = \mathrm{cl}(U)$[1] de $\mathrm{cl}(A \bigcap U) \subseteq X \setminus V$ (zárt), és ezért $b \notin \mathrm{cl}(A \bigcap U)$, tehát $A \bigcap U \notin f(b)$.

Mivel $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ezért $|X| \leq |\mathrm{ran}(f)| \subseteq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))|$.





$\square$

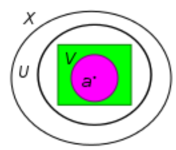
[1] A mai előadás első házi feladat miatt teljesül, lásd lentebb.

7. Állítás. *A következő állítások ekvivalensek:*

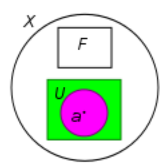
1. (X, τ) T_3.

2. *Ha* $a \in U \in \tau$, *akkor* $\exists V \in \tau$: $a \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$.

Bizonyítás.
1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen $a \in U \in \tau$, és legyen $F : X \setminus U$ (zárt): $a \notin F$. Ekkor T_3 miatt van olyan $V, W \in \tau$: $V \bigcap W = \emptyset$, $a \in V$, $X \setminus U \subseteq W$. Ekkor $\mathrm{cl}(V) \subseteq X \setminus W$ (zárt), és ezért $\mathrm{cl}(V) \subseteq U$.



2. $\Rightarrow$ 1.: Legyen $F \subseteq X$ zárt, $a \in X \setminus F$ nyílt, ezért 2. miatt van $U \in \tau$, amelyre $a \in U \subseteq \mathrm{cl}(U) \subseteq X \setminus F$. Legyen $V = X \setminus \mathrm{cl}(U)$ (nyílt), ekkor $U \bigcap V = \emptyset$, és $F \subseteq V$, $a \in U$.



$\square$

3.2. Házi feladatok

1. Hf. *Bizonyítsuk be, hogy* T_2 *terekben, ha* $D \subseteq X$ *sűrű, és* G *nyílt, akkor* $\mathrm{cl}(G \bigcap D) = \mathrm{cl}(G)$.

2. Hf. *Mutassuk meg, hogy ha* (X, τ) T_3, *akkor* $\mathrm{w}(X) \leq 2^{\mathrm{d}(x)}$.