Topológia 4. előadás

2012.03.02

1. Állítás. *Legyen* (X,τ) T_1. *Ekvivalensek:*

1. (X,τ) T_4.
2. *ha* $F \subseteq X$ *zárt,* $F \subseteq V \in \tau$, *akkor* $\exists U \in \tau : F \subseteq U \subseteq cl(U) \subseteq V$.

Bizonyítás:

$\Rightarrow$: T_4 miatt $\exists\ W, U \in \tau$; $F \subseteq U$; $X - V \subseteq W$; $U \cap W = \emptyset$. $cl(U) \subseteq X - W$ (zárt), ezért $cl(U) \subseteq V$.

$\Leftarrow$: Legyen A,B zárt, $A \cap B = \emptyset$.

$A \subseteq X - B \in \tau$, így a 2. miatt $\exists\ U \in \tau : A \subseteq U \subseteq cl(U) \subseteq X - B$. Legyen $V = X - cl(U)$ nyílt. $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. ■

2. Tétel. *Legyen* (X,τ) T_1*:*

Tegyük fel, hogy ha F *zárt,* $F \subseteq W \in \tau$, *akkor* $\exists$ *nyíltaknak egy* $\langle W_i, i \in \mathbf{N}\rangle$ *sorozata, hogy* $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} W_i$, $\forall i : cl(W_i) \subseteq W$. *Ekkor* (X,τ) *normális.*

Bizonyítás: Legyen A, B zárt és $A \cap B = \emptyset$.

1. Alkalmazzuk a feltételt A, $X - B$-re:
   $\exists\ \langle W_i, i \in \mathbf{N}\rangle\ A \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} W_i : \forall i\ cl(W_i) \subseteq X - B$ (W_i nyílt).
2. Hasonlóan alkalmazzuk a feltételt B, $X - A$-ra:
   $\exists\ \langle V_i, i \in \mathbf{N}\rangle\ B \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} V_i : \forall i\ cl(V_i) \subseteq X - A$ (V_i nyílt).

Legyen $G_i = W_i - \bigcup\limits_{j\le i} cl(V_j)$ és $H_i = V_i - \bigcup\limits_{j\le i} cl(W_j)$ nyíltak.

Legyen $G = \bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} G_i$ és $H = \bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} H_i$.

$A \subseteq G$, mert $\forall j : A \cap cl(V_j) = \emptyset$, valamint $B \subseteq H$, mert $\forall j : B \cap cl(W_j) = \emptyset$.

G, H nyilvánvalóan nyílt, ezért elég megmutatni, hogy $G \cap H = \emptyset$.

Legyen k, l tetszőleges: $G_k \cap H_l = \emptyset$, mert ha $k \ge l$, akkor $H_l \subseteq V_l$, és G_k még $cl(V_l)$-től is diszjunkt.

Ha $k \leq l$ akkor hasonlóan. Végül:
$G \cap H = (\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} G_i) \cap (\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} H_i) \overset{diszt.}{=} \bigcup\limits_{k,l \in \mathbf{N}} (G_k \cap H_l) = \emptyset$ (hiszen $G_k \cap H_l = \emptyset$). ■

3. Tétel. *Ha (X, τ) reguláris (T_3) és M_2 (azaz $w(X, \tau) \leq \aleph_0$), akkor (X, τ) normális.*

Bizonyítás: Legyen $B \subseteq \tau$ megszámlálható bázis. Belátjuk, hogy az előző tétel feltétele teljesül.

Legyen F zárt és $F \subseteq W \in \tau$.

T_3 miatt $\forall a \in F$-re $\exists\ W_a \in \tau$ (feltehető, hogy $W_a \in B$):
$a \in W_A \subseteq cl(W_a) \subseteq W$. Ezért $F \subseteq \bigcup\{W_a : a \in F\} \leftarrow$ mivel ez $\subseteq B$, ezért megszámlálható. ■

4. Definíció. (X, τ) $T_{3\frac{1}{2}}$ *(Tyihonov), ha T_1 és $\forall a \in X$, $F \subseteq X$ zárt, $a \notin F$ esetén van f: $X \to [0, 1]$ folytonos; $f(a) = 0$, $f|_F = 1$. (Pont és zárt halmaz folytonos függvénnyel szétválasztható.)*

5. Tétel. *Normális $\overset{2.}{\Rightarrow}$ Tyihonov $\overset{1.}{\Rightarrow}$ Reguláris*

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy (X, τ) Tyihonov. Legyen $F \subseteq X$ zárt, $a \in X - F$. $T_{3\frac{1}{2}}$ miatt van folytonos f: $X \to [0, 1]$, $f(a) = 0$, $f|_F = 1$. Legyen $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ és $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$. f folytonos → U, V nyílt: $U \cap V = \emptyset$; $a \in U$, $F \subseteq V$.

2. Legyen (X, τ) T_4. Többet látunk be:

Uriszon-lemma: Ha $A, B \subseteq X$ zárt, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ van folytonos f: $X \to [0, 1]$ $f|_A = 0$, $f|_B = 1$. (Zárt halmazok függvénnyel szétválaszthatóak.)

Rekurzióval megadunk $\forall r \in [0, 1] \cap Q$-ra egy $V_r \in \tau$ halmazt úgy, hogy $A \subseteq V_0$, $B \cap V_1 = \emptyset$ (V_0, V_1 konkrétan meg lesz adva). Ha $r < r^{'} \Rightarrow cl(V_r) \subseteq V_{r'}$.

T_4 tulajdonság miatt van $V_0 \in \tau$: $A \subseteq V_0 \subseteq cl(V_0) \subseteq X - B$ (legyen $V_1 = X - B$). Soroljuk fel $[0, 1] \cap Q$-t: $[0, 1] \cap Q = \{r_0, r_1, r_2, r_3, \dots\}$, $r_0 = 0$ és $r_1 = 1$. Tegyük fel, hogy $i \in \mathbf{N}$ és $\forall j \leq i$-re V_{r_j} már adott. Legyen $r_{bal} = max\{r_j : r_j < r_{i+1}, j \leq i\}$ és $r_{jobb} = min\{r_j : r_{i+1} < r_j, j \leq i\}$.
Indukció miatt $cl(V_{r_{bal}}) \subseteq V_{r_{jobb}}$. T_4 miatt van $V_{r_{i+1}}$, hogy $cl(V_{r_{bal}}) \subseteq V_{r_{i+1}} \subseteq cl(V_{r_{i+1}}) \subseteq V_{r_{jobb}}$.

Legyen f: $X \to [0, 1]$, hogy $f(a) = \begin{cases} \inf\{r : a \in V_r,\ ha\ a \in V_1\} \\ 1 \text{ különben.} \end{cases}$
Világos, hogy $f|_A = 0$, $f|_B = 1$.

Elég megmutatni, hogy f folytonos:

(1) Legyen $t \in [0,1]$.

6. Állítás. $f^{-1}([0,t)) = \bigcup_{r<t} V_r. \longleftarrow$ *nyílt!*

$\supseteq$: Triviális.

$\subseteq$: Tegyük fel, hogy $a \in f^{-1}([0,t))$, azaz $f(a) < t \to \exists r < t : a \in V_r \to$
$\to a \in \bigcup_{r<t} V_r$.

(2) Legyen $t \in [0,1]$.

7. Állítás. $f^{-1}((t,1]) = X - \bigcap_{r>t} cl(V_r) = \bigcup_{r>t} (X - cl(V_r))$ *(nyílt).*

$\supseteq$: Triviális (ha valamilyen $r > t$-re $cl(V_r)$ komplementuma tartalmazza a-t, akkor egyetlen r-nél kisebb r'-re sem telejsülhet $a \in V_{r'}$, mert $V_{r'} \subseteq V_r$; tehát $f(a) \geq r > t$).

$\subseteq$: Tegyük fel, hogy $a \in f^{-1}((t,1])$, azaz $f(a) > t \Rightarrow$ van $r, r^{'} \in Q$:
$t < r < r^{'} < f(a) \to a \notin V_{r'} \supseteq cl(V_r)$, azaz $a \in (X - cl(V_r))$, így
$a \in \bigcup_{r>t} (X - cl(V_r))$.

(3) Ha $t < z \Rightarrow f^{-1}((t,z)) = f^{-1}([0,z) \cap (t,1]) = \underbrace{f^{-1}([0,z))}_{\text{nyílt}} \cap \underbrace{f^{-1}((t,1])}_{\text{nyílt}}$.

Végül, ha $U \subseteq [0,1]$ nyílt, akkor előáll $[0,t), (t,z), (z,1]$ alakú halmazok uniójaként. $f(\bigcup A) = \bigcup f(A) \ldots$ ∎

8. Tétel. *Megszámlálható sok metrizálható tér direktszorzata metrizálható.*

Bizonyítás: Legyen (X_i, τ_i) topologikus tér ($i \in \mathbf{N}$). Tegyük fel, hogy ρ_i olyan metrika X_i-n, hogy $\tau_i = \rho_i$ szerinti nyílt halmazok. Feltehetjük: $\forall i$-re $ran(\varrho_i) \subseteq [0,1]$.

Legyen ρ a következő metrika az X_i-k direktszorzatán:

$$\rho((a_0, a_1, \ldots)(b_0, b_1, \ldots)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(a_i, b_i)$$

A bizonyítást a legközelebbi előadáson folytatjuk. ∎

Házi feladat: lássuk be, hogy az előző ϱ tényleg metrika.