5.előadás
Topologikus terek metrizálhatósága

2012. május 16.

Minden metrikus tér egyben topologikus tér is, amit a metrika segítségével meghatározott nyílt halmazok írnak le. A topológia egyik, hosszú ideig nyitott problémája volt, hogy melyek azok a topologikus terek, amelyek topológiája metrikából származtatható, úgymond metrizálható. A kérdést végül a Bing–Nagata–Smirnov-tétel válaszolta meg teljesen. Ebben a problémakörben fogunk ismertetni három tételt.

Definíció. *Minden (X, ρ) metrikus tér esetén legyen τ_ρ az X nyílt részhalmazainak a családja. Ekkor az (X, τ_ρ) párt a metrikus tér által generált topologikus térnek nevezzük.*

Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (X, τ) topologikus tér metrizálható, ha létezik olyan ρ metrika az X halmazon, melyre $\tau_\rho = \tau$ teljesül.*

Tétel. *Megszámlálható sok metrizálható tér direkt szorzata metrizálható.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (X_i, τ_i) topologikus terek metrizálhatók ($i \in \mathbb{N}$). Mutassuk meg, hogy a

$$\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, \prod_{i \in \mathbb{N}} \tau_i \right)$$

pár is metrizálható.
Legyen ρ_i olyan metrika, amelyből τ_i származik, azaz $\forall i \in \mathbb{N}$ esetén τ_i megegyezik a ρ_i-szerinti nyílt halmazok családjával. Egy korábbi házi feladat alapján feltehető, hogy $\forall\, i \in \mathbb{N}$-re $Ran(\rho_i) \subseteq [0,1]$ teljesül.
Definiáljuk a $\rho : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \to \mathbb{R}$ metrikát a következő módon:

$$\rho(a,b) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_i(a_i, b_i)}{2^i}, \;\; ahol\ a, b \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \;\; .$$

Mutassuk meg, hogy a fent definiált ρ-metrika által meghatározott nyílt halmazok ugyanazok, mint a $\prod_{i \in \mathbb{N}} \tau_i$ topológia által indukált nyílt halmazok!
1. Jelölje a $B^d_\gamma(a)$ szimbólum az a pont γ sugarú d-metrika szerinti nyílt környezetét!

$$G = B^{\rho_0}_{\varepsilon_0}(a_0) \times B^{\rho_1}_{\varepsilon_1}(a_1) \times \cdots \times B^{\rho_n}_{\varepsilon_n}(a_n) \times \prod_{i > n} X_i$$

egy tipikus nyílt halmaz a topologikus szorzatban $\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \tau_i\right)$ ρ szerint. Legyen $a \in G$ tetszőleges, és lássuk be, hogy $\exists \delta > 0 : B^\rho_\delta(a) \subseteq G$ teljesül!
Legyen $\varepsilon := min\{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\}$, továbbá $\delta := \frac{\varepsilon}{2^n}$.

$$\rho(a,b) < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_i(a_i, b_i)}{2^i} < \delta \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \frac{\rho_i(a_i, b_i)}{2^i} < \delta \Rightarrow \rho_i(a_i, b_i) < 2^i \cdot \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon, ha\ i \leq n \;\; .$$

Ezek alapján G előáll ρ-beli nyílt gömbök uniójaként.

2. Mutassuk meg, hogy $\forall\varepsilon > 0$ és tetszőleges $a \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ pont esetén $B_\varepsilon^\rho(a)$ nyílt a szorzat-topológiában $\left(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i\right)$. Tudjuk, hogy

$$\exists\ N \in \mathbb{N}: \sum_{i>N} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2^i}}$$

és

$$B_\delta^{\rho_0}(a_0) \times B_\delta^{\rho_1}(a_1) \times \cdots \times B_\delta^{\rho_n}(a_n) \times \prod_{i>n} X_i =: H \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \tau_i$$

$H \subseteq B_\varepsilon^\rho(a)$, mivel ha $b \in H \Rightarrow$

$$\rho(a,b) \leq \sum_{i=0}^{N} \frac{\rho_i(a_i,b_i)}{2^i} + \sum_{i>N} \frac{\rho_i(a_i,b_i)}{2^i} < \delta \cdot \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2^i} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Tehát a $B_\varepsilon^\rho(a)$ előáll a $\prod_{i\in\mathbb{N}} \tau_i$ elemeinek uniójaként. ■

Megjegyzés. Az előző bizonyításban tulajdonképpen azt láttuk be, hogy a ρ-szerinti topológia és a szorzat-topológia egy-egy bázisa kofinális egymásban, sőt a gömbök középpontját tartalmazza egy másik nyílt halmaz. Ezek alapján bázisai egymásnak, és így – a következő tétel alapján – közös bázissal rendelkeznek.

Állítás. *Legyen (X,τ) topologikus tér, melyben $\beta \subseteq \tau$ nyílt halmazok egy rendszere. A β bázis τ-ban pontosan akkor, ha minden $a \in G \in \tau$ ponthoz létezik olyan $B \in \beta$, hogy $a \in B \subseteq G$ teljesül.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$:
Ha β bázis, akkor tetszőleges $G \in \tau$ halmaz esetén léteznek olyan $\{U_i : i \in I\} \subseteq \beta$ halmazok, hogy $G = \bigcup_{i\in I} U_i$ teljesül. Ha $a \in G \in \tau$, akkor $\exists i \in I : a \in U_i \subseteq G$.
$\Leftarrow$:
Legyen $H \in \tau$ tetszőleges. Feltettük, hogy minden $a \in H$ elemhez létezik olyan $B_a \in \beta$, amire $a \in B_a \subseteq H$, így $H = \bigcup_{a\in H} B_a$, ezért β egy bázis. ■

Tétel. (Uriszon metrizációs tétele) *Reguláris, megszámlálható bázisú topologikus tér metrizálható.*

Bizonyítás. Legyen (X,τ) olyan T_3 topologikus tér, amire teljesül, hogy $w(\tau) \leq |\mathbb{N}|$. Korábban már beláttuk, hogy reguláris M2 tér normális, így Uriszon lemmája miatt az X-beli zárt halmazok szétválaszthatók.
Mutassunk egy olyan $f : X \to [0;1]^{\mathbb{N}}$ függvényt, ami homeomorfizmus. Ekkor $Ran(f) \subseteq [0;1]^{\mathbb{N}}$, így – az első tétel miatt – az $(X;\tau)$ topologikus tér metrizálható lenne.
Legyen β az $(X;\tau)$ egy megszámlálható bázisa, valamint legyen

$$S := \{(U,V) \in \beta \times \beta\,|\, cl(U) \subseteq V\}.$$

Ekkor $|S| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ teljesül.
Az Uriszon–lemma miatt minden $s = (U,V) \in S$-hez van olyan $f_s : X \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos, és igaz rá, hogy

$$f_s|_{cl(U)} = 0 \ \wedge\ f_s|_{X-V} = 1\ .$$

Továbbá feltehető, hogy $Ran(f_s) \subseteq [0;1]$.
Az $\{f_s : s \in S\}$ halmaz megszámlálható függvényhalmaz, amelynek minden eleme folytonos. Legyen

$$f : X \to [0;1]^{\mathbb{N}},\ f(a) = \langle f_s(a) | s \in S\rangle.$$

Mutassuk meg, hogy f homeomorfizmus!
1. f a direktszorzat bevezetésénél meggondoltak miatt folytonos.

2. Igazoljuk, hogy f injektív!
Legyen $a \neq b$ az X két eleme. Legyen $U, V \in \tau$ olyan, hogy $a \in U, b \in V$ és $U \cap V = \varnothing$ teljesül. Mivel β bázis, ezért létezik olyan $U' \in \beta$, hogy $a \in U' \subseteq U$. A T_3 tulajdonság miatt van $U'' \in \tau :\ a \in U'' \subseteq cl(U'') \subseteq U'$. Mivel β bázis, ezért létezik $U''' \in \beta :\ a \in U''' \subseteq U''$. Tehát $U', U'' \in \beta$-re $cl(U''') \subseteq cl(U'') \subseteq U'$ áll fenn. Ezért ha $s := (U''', U') \in S$, $a \in U''', b \in (X - U')$, akkor $f_s(a) = 0,\ f_s(S) = 1$, így $f(a) \neq f(b)$.
3. Mutassuk meg, hogy ha $F \subseteq X$ zárt, $a \notin F$, akkor létezik olyan $s = (G, H) \in S$, hogy

$$f_s(a) \notin cl(f_s(F))$$

teljesül!
Mivel β bázis, ezért létezik olyan $H \in \beta$, hogy $a \in H \subseteq (X - F)$ igaz. A regularítás miatt van $U \in \tau :\ a \in U \subseteq cl(U) \subseteq H$. Ekkor $\exists G \in \beta :\ a \in G \subseteq U$. Így $s = (G, H) \in S$, $f_s|_G = 0$ és $f_s|_F = 1$, ezért $f_s(a) = 0 \notin cl\,(f_s(F)) = \{1\}$.
4. Igazoljuk, hogy ha $F \subseteq X$ zárt, akkor $f(F)$ is zárt a $Ran(f)$-hez tartozó altér-topológia szerint!
Vegyük észre, hogy ha $f(a) \in cl(f(F))$, akkor minden $s \in S$ esetén $f_s(a) \in cl(f_s(F))$ teljesül. Ellenkező esetben lenne olyan

$$\varepsilon > 0 :\ B_\varepsilon(f_s(a)) \cap f_s(F) = \varnothing, ekkor$$

$$B_\varepsilon(f_s(a)) \ \times \prod_{z \in S, z \neq s} [0;1]$$

egy $f(F)$-től diszjunkt $f(a)$-t tartalmazó nyílt halmaz lenne, így

$$cl(f(F)) \subseteq [0;1]^{\mathbb{N}} - \left(B_\varepsilon(f_s(a)) \ \times \prod_{z \in S, z \neq s} [0;1] \right),$$

ami ellentmondás. Ezért az észrevétel miatt, ha

$$f(a) \in cl(f(F)) \Rightarrow \forall s \in S :\ \ f_s(a) \in cl(f_s(F)).$$

Így a **3.** miatt $a \in F$, ezért $f(a) \in f(F)$. Tehát $cl(f(F)) \subseteq f(F)$, továbbá triviális, hogy $cl(f(F)) \supseteq f(F)$. Ezek alapján beláttuk, hogy $f(F)$ zárt. Mivel F tetszőleges volt, ezért bármely zárt halmaz f szerinti képe zárt a topológiában, ami azt jelenti, hogy f^{-1} folytonos.
Így az f függvény injektív és folytonos, továbbá f^{-1} is folytonos, tehát az f homeomorfizmus X és a $[0;1]^{\mathbb{N}}$ egy altere között, ami metrizálható. ■

Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér. Azt mondjuk, hogy $S \subseteq P(X)$*

1. *diszkrét rendszer, ha minden $a \in X$ pont esetén létezik olyan $U \in \tau$ nyílt halmaz, hogy $a \in U$ és $|\{\, Z \in S\ | U \cap Z \neq \varnothing\}| \leq 1$ teljesül.*

2. *σ-diszkrét, ha van $\{S_i : i \in \mathbb{N}\}$, hogy minden $i \in \mathbb{N}$-re S_i diszkrét, és $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ teljesül.*

Tétel. (Bing–féle metrizációs tétel) *Az (X, τ) topologikus tér pontosan akkor metrizálható, ha a topologikus tér reguláris, és van σ-diszkrét bázisa.*

Bizonyítás. A Bing–féle metrizációs tétel egy gyengébb változatát a következő két előadáson bizonyítottuk be.