Bevezetés a topológiába

2012. április 27.

6. Előadás

⟨1⟩ **1. Állítás.** *Legyen (X, τ) topologikus tér, $A \subseteq X$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *A nyílt;*
2. *minden $a \in A$ esetén létezik $U_a \in \tau$, hogy $a \in U_a \subseteq A$ (azaz A minden pontja belső pont).*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2: Ha $a \in A$, akkor $U_a := A$.
2. $\Rightarrow$ 1: $A = \bigcup_{a \in A} U_a$, a jobb oldal nyílt, így a bal is. □

1. Definíció. *Ha $D \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy halmazrendszer, akkor D pontosan akkor diszkrét, ha minden $a \in X$ esetén létezik $U_a \in \tau$, hogy $a \in U_a$ és*

$$|\{d \in D \mid d \cap U_a \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

2. Definíció. *D σ-diszkrét, ha van $(D_i, i \in N)$, hogy $D = \bigcup_{i \in N} D_i$, és minden $D_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ diszkrét halmazrendszer.*

⟨5⟩ **2. Állítás.** *Ha $D \subseteq \mathcal{P}(X)$ zárt halmazok egy diszkrét rendszere, akkor $\bigcup D$ zárt.*

Bizonyítás. Legyen $a \in (X \setminus \bigcup D)$ tetszőleges. D diszkrét, ezért létezik $U_a \in \tau$, hogy $a \in U_a$ és U_a D-nek legfeljebb egy elemét metszi.

1. Ha U_a D összes elemétől diszjunkt, akkor $U_a \subseteq (X \setminus \bigcup D)$, U_a nyílt.
2. Ha van olyan $d \in D$, hogy $U_a \cap d \neq \emptyset$, d zárt, ezért $U'_a := U_a \cap (X \setminus d)$ nyílt. Ekkor $U'_a \subseteq (X \setminus \bigcup D)$ nyílt.

Mindkét esetben teljesül az 1. állítás 2. pontja, így $X \setminus \bigcup D$ nyílt. □

1. Tétel (Bing-féle metrizációs tétel gyenge alakja)**.** *Legyen (X, τ) topologikus tér. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *(X, τ) metrizálható;*
2. *(X, τ)-ra teljesül:*
   (a) *reguláris;*

(b) *van σ-diszkrét bázisa;*

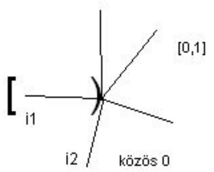
(c) *minden $G \in \tau$-hoz van folytonos $f : X \to [0,1]$ függvény, hogy $G = f^{-1}(0,1]$ (az f függvény G-n kívül konstans 0).*

1. Megjegyzés. *(c) pont felesleges, ugyanis következik az (a) és (b) pontokból, de ezt nem bizonyítjuk.*

A bizonyítás terve: 2. $\Rightarrow$ 1: X-et be fogjuk ágyazni homeomorf módon egy metrizálható térbe.

3. Definíció. *Legyen I halmaz, Sün(I) az a metrikus tér, melynek alaphalmaza I számosságú $[0,1]$ intervallum, a 0-ban összeragasztva, a metrika pedig: ha $a, b \in$ Sün(I), akkor*

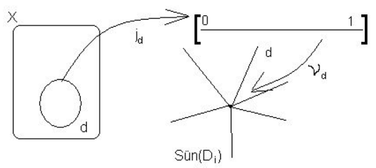
$$\rho(a,b) := \begin{cases} \textit{szokásos távolság}, & \textit{ha } a,b \textit{ azonos tüskén van;} \\ \rho(a,0)+\rho(0,b) & \textit{egyébként.} \end{cases}$$



?⟨11⟩? 1. ábra.

Bizonyítás. 2. $\Rightarrow$ 1: b miatt létezik $(D_i, i \in N)$, hogy minden i-re D_i diszkrét halmazrendszer, és $\bigcup_{i\in N} D_i$ bázis X-ben. Legyen $Y = \prod_{i \in N} \text{Sün}(D_i)$, ez metrizálható. Cél: X-et Y-ba ágyazni.

Rögzítsük $i \in N$-t. Mivel minden $d \in D_i$ nyílt, ezért van folytonos $f_d : X \to [0,1]$, hogy $d = f_d^{-1}(0,1]$. Legyen $k_d : X \to \text{Sün}(D_i)$, $k_d = \nu_d \circ f_d$, ahol ν_d $[0,1]$-et Sün(D_i) d-hez tartozó tüskére viszi.



?⟨11⟩? 2. ábra.

3. Állítás. *Minden $a \in X$ esetén legfeljebb 1 db $d \in D_i$ van, melyre $a \in cl(d)$ (Jelölés: $d = d_a$).*

Bizonyítás. Legyen $a \in X$ tetszőleges. D_i diszkrét, ezért van $U_a \in \tau$, hogy $a \in U_a$ és U_a D_i-nek legfeljebb egy elemét metszi. Ha minden $d \in D_i$-re $d \cap U_a = \emptyset$, akkor minden $d \in D_i$-re $a \notin \mathrm{cl}(d)$.

Ha $d \in D_i$-re $d \cap U_a \neq \emptyset$, akkor minden $e \in (D_i \setminus \{d\})$ esetén $e \cap U_a = \emptyset$, azaz $e \subseteq (X \setminus U_a)$ zárt, így $a \notin \mathrm{cl}(e)$. □

Legyen $f_i : X \to \mathrm{Sün}(D_i)$ a következő függvény:

$$f_I(a) = \begin{cases} k_d(a), & \text{ha } d_a \text{ definiált;} \\ \text{sünköldök (közös 0)}, & \text{ha } d_a \text{ nem definiált.} \end{cases}$$

4. Állítás. *f_i folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $F \subseteq \mathrm{Sün}(D_i)$ zárt. Ekkor tetszőleges $d \in D_i$ esetén: $\mathrm{ran}(\nu_d) \cap F$ zárt. $f_I^{-1}(F) = f_I^{-1}\left(\cup_{d\in D_i}(\mathrm{ran}(\nu_d) \cap F)\right) = \bigcup_{d\in D_i} f_I^{-1}(\mathrm{ran}(\nu_d) \cap F) = \bigcup_{d\in D_i} k_d^{-1}(F)$, és $\bigcup_{d\in D_i} k_d^{-1}(F) \subseteq d$, D_i diszkrét, $k_d^{-1}(F)$ zárt, ezért a 2. állítás szerint a jobb oldalon lévő unió zárt. □

Mostantól i szabad változó.

⟨25⟩ **5. Állítás.** *$(f_i, i \in N)$ szétválasztják a pontokat és zárt halmazokat: ha $F \subseteq X$ zárt, $a \notin F$, akkor van $i \in N$: $f_i(a) \notin cl(f_i(F))$.*

Bizonyítás. A regularitás miatt van olyan $u \in D$: $a \in u \subseteq \mathrm{cl}(u) \subseteq X \setminus F$. D bázis, ezért van $u' : a \in u' \subseteq u$. Ekkor $a \in u' \subseteq \mathrm{cl}(u') \subseteq X \setminus F$. Mivel $D = \bigcup_{i\in N} D_i$, így van $i \in N$, hogy $u' \in D_i$.

Egyrészt $f_i(a) \in u'$-höz tartozó tüske, másrészt F diszjunkt $\mathrm{cl}(u')$-től, ezért $f_i(F)$ diszjunk az u'-höz tartozó tüskétől. Emiatt $f_i(a) \notin \mathrm{cl}(f_i(F))$. □

Legyen $f : X \to Y$, $f(a) = \langle f_i(a) \mid i \in N\rangle$, $Y = \prod_{i\in N} \mathrm{Sün}(D_i)$.

Cél: f mutatja, hogy X homeomorf Y egy alterével (ez elég, mert Y metrizálható, tehát minden altere metrizálható). f folytonos (direkt szorzat bevezetésénél láttuk). f injektív, mert ha $a \neq b$, akkor pl. $\{b\}$ zárt, ezért van $i \in N$, hogy $f_i(a) \notin \mathrm{cl}(f_i(b))$, így $f_i(a) \neq f_i(b)$, tehát $f(a) \neq f(b)$.

f^{-1} folytonos: (mint Urysohn metrizációs tételénél) elég belátni, hogy ha $F \subseteq X$ zárt, akkor $f[F]$ zárt (Y-nak a $\mathrm{ran}(f)$-hez tartozó alterében). Legyen $F \subseteq X$ zárt, legyen $a \in X$ olyan, hogy $f(a) \in \mathrm{cl}(f[F])$.

(*) Ekkor minden $i \in N$ esetén $f_i(a) \in \mathrm{cl}(f_i(F))$, mert tegyük fel, hogy $i \in N$ olyan, hogy $f_i(a) \notin \mathrm{cl}(f_i(F))$. Legyen $\varepsilon = (\mathrm{Sün}(D_i) \setminus \mathrm{cl}(f_i(F)) \times \prod_{j\neq i} \mathrm{Sün}(D_j)$.

Ekkor $\varepsilon \subseteq Y$ nyílt, $a \in \varepsilon$. $f[F] \cap \varepsilon = \emptyset$, emiatt $\mathrm{cl}(F) \subseteq Y \setminus \varepsilon$. Tehát $a \notin \mathrm{cl}(f[F])$ ellentmondás.

(*)-ot az 5. (szétválasztási) állítással kombinálva kapjuk, hogy $a \in F$. Emiatt $f(a) \in f(F)$. Mivel $f(a) \in \mathrm{cl}(f(F))$ tetszőleges volt, ezért $\mathrm{cl}(f(F)) \subseteq f(F)$, azaz $f(F)$ zárt.

□