Topológia 7. előadás

2012.03.24.

Az előző előadás folytatása. Tehát azt kell belátnunk, hogy az első állításból következik a második.

1. Tétel. *Ha (X,τ) metrizálható, akkor:*

1. *reguláris,*
2. *ha $A \subseteq X$ nyílt, van olyan $f\colon X \to [0,1]$ folytonos függvény, amire $A = f^{-1}(0,1]$ teljesül,*
3. *van σ-diszkrét bázisa.*

Bizonyítás: Van egy olyan ρ metrika X-en, hogy $\tau =$ "ρ szerinti nyílt halmazok rendszerével". Továbbá feltehető, hogy $\mathrm{ran}(\rho) \subseteq [0,1]$.

1. ha $\varepsilon > 0$, a $\in X$, akkor legyen C(a,ε) ={b $\in X : \rho(a,b) \leq \varepsilon\}$.

   1. Lemma. *$C(a,\varepsilon)$ zárt.*

   Bizonyítás: Legyen d $\in X \setminus C(a,\varepsilon)$. Ekkor $\rho(d,a) > \varepsilon$ és vegyünk egy $\gamma > 0$-t úgy, hogy $\rho(a,d) - \gamma > \varepsilon$, ekkor B $(d,\gamma) \subseteq X \setminus C(a,\varepsilon)$, hiszen, ha veszünk egy $e \in B(d,\gamma)$ pontot, akkor

   $$\rho(a,d) \leq \rho(a,e) + \rho(e,d)$$

   $$\rho(a,d) - \rho(e,d) \leq \rho(a,e)$$

   mivel

   $$\rho(e,d) < \gamma$$

   ezért

   $$\rho(a,d) - \rho(e,d) > \varepsilon.$$

   (X,τ) reguláris, megmutatjuk, miért. Veszünk egy $a \in G \in \tau$ pontot. τ egy bázisa: $\{B(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$, ezért létezik egy pozitív ε, hogy $C\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \mathrm{B}(a,\varepsilon)$. ■

2. Vegyünk egy A halmazt, amely X-nek egy részhalmaza és persze nyílt. Legyen $f:\ X\to[0,1]$, $f:(a)=inf\{\rho(a,b):b\in X\setminus A\}$. $\forall a\in A, f(a)$ pozitív, mivel A nyílt, ezért rögzített a-hoz van pozitív ε: $B(a,\varepsilon)\subseteq A$ emiatt $\forall b\in X\setminus A:\rho(a,b)\geq\varepsilon$. Végül f folytonosságát kell belátni, amely metrikus terek között hat. Vegyünk c és d pontokat az X térből, majd egy $b\in X\setminus A$ pontot. Ekkor:

$$\rho(d,b)\leq\rho(d,c)+\rho(c,b)$$

és

$$\rho(c,b)\leq\rho(d,c)+\rho(d,b).$$

Ezekből következik, hogy

$$\rho(c,b)-\rho(d,c)\leq\rho(d,b).$$

Tehát,

$$\rho(c,b)-\rho(d,c)\leq\rho(d,b)\leq\rho(c,b)+\rho(d,c) \tag{1}$$

Vegyünk egy tetszőleges c pontot az X-ből. Azt kell belátni, hogy van $\delta:\forall d\in B(c,\delta);f(d)\in B(f(c),\varepsilon)$. Legyen $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Ha d $\in B\left(c,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ és $b\in X-A$ tetszőleges, akkor (1) miatt $f(d)\in B(f(c),\varepsilon)$.

3. A σ-diszkrét bázis létezésének a bizonyítása előtt egy kitérőt teszünk, melyben néhány definíciót fogalmazunk meg.

1. Definíció. *Ha f egy I-n értelmezett halmazértékű függvény, akkor f egy halmazrendszer és $(A_i, i\in I)$ módon is jelöljük.*

2. Definíció. *Kiválasztási axióma alatt azt az állítást értjük, hogy ha $(A_i : i\in I)$ nem üres halmazoknak egy rendszere, akkor van egy olyan f függvény, hogy* $\mathrm{dom}(f)=I$ *és $(\forall i\in I)$-re $f(i)\in A_i$. Az f függvényt kiválasztási függvénynek nevezzük.*

3. Definíció. *A $\leq$ relációt részben rendezésnek nevezzük, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.*

4. Definíció. *A $<$ relációt jólrendezésnek nevezzük, ha irreflexív, tranzitív, trichotóm (bármely két eleme összehasonlítható) és minden nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.*

2. Lemma. *(Zorn-Lemma): Ha az $(A,\leq)$ részben rendezett halmaz minden linárisan rendezett része felülről korlátos, akkor A-ban van maximális elem.*

2. Tétel. *A ZF. axiómarendszerben a következők ekvivalensek:*

(a) *Kiválasztási-axióma,*

(b) *Zorn-Lemma,*

(c) *Jólrendezési-tétel: Minden A halmazon van jólrendezés.*

Bizonyítás: Halmazelméleti kurzuson. ■

A σ-diszkrét bázis létezésének bizonyításához több dolgot is belátunk.

3. Lemma. *Vegyünk egy (X,τ) metrizálható topologikus teret, amelyben ρ legyen a megfelelő metrika és $(\operatorname{ran}(\rho) \subseteq [0,1])$. Legyen B τ-nak egy bázisa. Ekkor létezik egy olyan B' bázis, hogy B' σ-diszkrét és $\forall b \in B' \exists c \in B$: $b \subseteq c$. Ekkor B'-t a B finomításának nevezzük.*

Bizonyítás: Ha van egy A$\subseteq$ X tetszőleges és egy pozitív ε-unk, akkor $S_\varepsilon(A)$= $\{a \in A : B(a,\varepsilon) \subseteq A\}$. Ekkor $S_\varepsilon(A)$ az A ε-soványítása. Vegyünk egy $<$ relációt, ami B-nek egy rögzített jólrendezése. Vegyünk egy rögzített n-t. Vegyük $b'_n = S_{\frac{1}{n}}(b) \setminus \left(\bigcup_{c<b} c\right)$-t, továbbá legyen $\forall b \in B$ esetén $b_n" = \bigcup_{x\in b'_n} B\left(x, \frac{1}{3n}\right)$-ot és nevezzük "felfújt"-nak. ■

* Ha $c \in B$ és c nem egyezik meg b-vel, és $x \in b'_n, y \in c'_n$, akkor $\rho(x,y) \geq \frac{1}{n}$, mert feltehető, hogy b nagyobb mint c, ezért x nincs benne $B\left(y, \frac{1}{n}\right) - ban$, hiszen $x \in b'_n$ ezért x nem eleme c-nek, viszont $y \in c'_n$, ezért $B\left(y, \frac{1}{n}\right) \subseteq c$.

3. Tétel. *$B^{(n)} = \{\bigcup b"_n : b \in B\}$ egy diszkrét rendszer.*

Bizonyítás: Vegyünk egy s pontot az X térből. Vizsgáljuk azt az eshetőséget, hogy $B\left(s, \frac{1}{6n}\right)$ metszené $b"_n \neq c"_n$-et is. Vegyünk egy $l_1 \in B\left(s, \frac{1}{6n}\right) \cap b"_n$ majd egy $l_2 \in B\left(s, \frac{1}{6n}\right) \cap c"_n$-t. Van egy $f_1 \in b'_n : \rho(f_1, l_1) < \frac{1}{3n}$ és $f_2 \in c'_n : \rho(f_2, l_2) < \frac{1}{3n}$. Ekkor

$$\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, l_1) + \rho(l_1, s) + \rho(s, l_2) + \rho(l_2, f_2) < \frac{1}{n},$$

mert $\rho(f_1, l_1) < \frac{1}{3n}$ és $\rho(l_1, s) < \frac{1}{6n}$ és $\rho(s, l_2) < \frac{1}{6n}$ és $\rho(l_2, f_2) < \frac{1}{3n}$, ami miatt ellentmondásba kerültünk a *-gal kezdődő bekezdéssel.

■

4. Tétel. *$B^{(n)} = \{\bigcup b"_n : b \in B\}$ minden n $(b"_n \subseteq b)$ esetén egy finomítása B-nek.*

Bizonyítás: Triviális, hiszen $(b"_n \subseteq b)$. ■

Végül belátjuk, hogy $B' = \bigcup B^{(n)}$, ami σ-diszkrét bázis. Az világos, hogy σ-diszkrét halmazrendszer. Azt kell belátnunk, hogy ez tényleg bázis. Vegyünk egy a pontot az X térből és egy a-t tartalmazó $G \in \tau$-t. Arra van szükségünk, hogy van olyan $\gamma \in B'$ melyre $a \in \gamma \subseteq G$. Mivel B egy bázis, ezért létezik egy olyan b eleme, hogy $a \in b$, így feltehető, hogy a $<$ reláció szerint b a legkisebb ilyen elem. Van olyan n: $B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq b$, mert b nyílt. Ekkor $a \in b"_n$. B bázis lévén, van egy c eleme, amire teljesül, hogy $a \in c \subseteq b"_n \cap G$, így $\gamma = c"_n$. Ezzel a teljes állítást beláttuk.

■