8. Előadás

2012.03.30

1. Összefüggőség

1. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $A \subseteq X$. A összefüggő, ha A nem fedhető le két diszjunkt nem üres nyílt halmazzal. Az (X, τ) tér összefüggő, ha X összefüggő.*

Megjegyzés: A akkor és csak akkor összefüggő, ha az altér topológiában A összefüggő tér.
Emlékeztető: (X, τ) diszkrét, ha $\tau = \mathcal{P}(X)$.
$f : X \to Y$ diszkrét értékű, ha Y diszkrét topologikus tér.
Két elemű diszkrét tér: $2 = (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$.

2. Tétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, A. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *A összefüggő;*
2. *ha $f : A \to 2$ folytonos, akkor f konstans;*
3. *ha D diszkrét tér, $f : A \to D$ folytonos, akkor f konstans.*

Bizonyítás: $1 \Rightarrow 3$: Tegyük fel, hogy A összefüggő és legyen$f : A \to D$ folytonos. Indirekt tegyük fel, hogy f nem konstans, ekkor van $a \neq b \in Ran(f)$. Legyen $U = f^{-1}(a), V = f^{-1}(Ran(f) \setminus \{a\})$. D diszkrét, f folytonos, ezért U, V nyílt. Az a, b pontok választása miatt $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$, így ellentmondásra jutottunk.
$3 \Rightarrow 2$: Triviális.
$2 \Rightarrow 1$: Tegyük fel indirekt, hogy 2 teljesül, de 1 nem. Ekkor van $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ nyílt, hogy $U \cap V = \emptyset, A \subseteq U \cup V$. Legyen $f : A \to 2$:

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad a \in \text{U} \\ 1 & \text{ha} \quad a \in \text{V} . \end{cases}$$

$U, V \neq \emptyset$, ezért f nem konstans, f folytonos, mert U, V nyílt. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis a tételt beláttuk. ∎

3. Tétel. *Összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő.*

Bizonyítás: Legyen $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topologikus tér, A összefüggő. Legyen $g: f[A]\to 2$ tetszőleges folytonos függvény. $g\circ f : A\to 2$ folytonos és A összefüggő, ezért $g\circ f$ konstans. Tegyük fel indirekt, hogy $a,b\in f[A]$ ahol $g(a)\neq g(b)$ teljesül. Ekkor $\exists a',b'\in A$, melyekre $f(a')=a, f(b')=b$ így $g\circ f(a')\neq g\circ f(b')$, ami ellentmondás, vagyis a tételt beláttuk. ■

4. Tétel. *Legyen (X,τ) topologikus tér. $\forall i\in I$-re legyen $A_i\subseteq X$ összefüggő. Ha $\forall i,j\in I$-re $A_i\cap A_j\neq\emptyset$, akkor $\cup A_i$ összefüggő.*

Bizonyítás: Legyen $f:\bigcup_{i\in I}A_i\to 2$ folytonos. Legyen $a,b\in\bigcup_{i\in I}A_i$, ekkor ha $f(a)=f(b)$ teljesül, készen vagyunk. Van $i,j\in I$ hogy $a\in A_i, b\in A_j$.
1. eset: $i=j$. Ekkor $f|_{A_i}$ konstans, mert A_i összefüggő, így $f(a)=f(b)$.
2. eset: $i\neq j$. Van $c\in A_i\cap A_j$. Előző esetből ekkor $f(a)=f(c)$ és $f(c)=f(b)$, azaz $f(a)=f(b)$. ■

5. Definíció. *$a\sim b$ ha van összefüggő $A\subseteq X$, hogy $a,b\in A$.*

6. Tétel. *Legyen (X,τ) topologikus tér. Ekkor*
1. $\sim$ ekvivalencia reláció
2. a ekvivalencia osztálya $\bigcup\{A\subseteq X : a\in A, A$ összefüggő$\}$.

Bizonyítás: 1. $\sim$ reflexív: ha $c\in X$, akkor $\{c\}$ összefüggő, emiatt $\sim$ reflexív.
$\sim$ szimmetrikus: triviális.
$\sim$ tranzitív: az előző állítás két halmazra történő alkalmazásából adódik.
2. Legyen B a ekvivalencia osztálya. Az előző állítás miatt $A'=\bigcup\{A : a\in A,\ A$ összefüggő$\}$ egy összefüggő halmaz, ezért $A'\subseteq B$. Fordítva, ha $b\in B$, akkor van összefüggő C, hogy $a,b\in C$. Ezért $b\in C\subseteq A'$. Így $B\subseteq A'$ teljesül.
■

7. Állítás. $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ *a szokásos topológiában összefüggő.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $[0,1]$ nem összefüggő. Van nyílt $U,V\neq\emptyset$ melyekre $U\cap V=\emptyset, U\cup V\supseteq[0,1]$. Legyen $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(a)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad a\in\text{U}\\ 1 & \text{ha} \quad a\in\text{V}\end{cases}$.
f folytonos, mert U,V nyílt. Így a Bolzano tétel miatt $\exists c\in[0,1]$, hogy $f(c)=\frac{1}{2}$, ez pedig ellentmondás. ■

8. Definíció. *Legyen (X,τ) topologikus tér, $A\subseteq X$. A ívszerűen összefüggő, ha $\forall a,b\in A$ van $f:[0,1]\to X$, hogy:*

- *f folytonos,*
- *$f(0)=a, f(1)=b$,*
- *$Ran(f)\subseteq A$.*

Példák:

- $\mathbb{R}^n$ konvex részhalmazai ívszerűen összefüggőek.

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ csillagtartomány, ha van $a \in A$ hogy $\forall b \in A$-ra ab szakasz$\subseteq A$. A csillagtartományok ívszerűen összefüggőek.

9. Lemma. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $A, B \subseteq X$ ívszerűen összefüggőek. Ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $A \cup B$ ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás: Legyen $a, b \in A \cup B$.
1. eset: $a, b \in A$ vagy $a, b \in B$. Van $f : [0,1] \to X$ folytonos, melyre $f(0) = a$ és $f(1) = b$.. Ekkor $Ran(f) \subseteq A \cup B$, amiből következik az állítás.
2.eset: Pl.: $a \in A, b \in B$. Van $c \in A \cap B$. Ekkor f-el dupla sebességgel menjünk a-ból c-be, c-ből pedig b-be így teljesül az állítás. ■

10. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér,$a, b \in X$. $a \sim_0 b$ ha van $A \subseteq X$ ívszerűen összefüggő, melyre igaz, hogy $a, b \in A$.*

11. Tétel. $\sim_0$ *ekvivalenciareláció (a ekvivalenciaosztálya a ívszerű összefüggőségi komponense).*

Bizonyítás:
$\sim_0$ reflexív: $\{a\}$ ívszerűen összefüggő (konstans függvény mutatja).
$\sim_0$ szimmetrikus: Tegyük fel, hogy $a, b \in X$ és $a \sim_0 b$. Van ívszerűen összefüggő A, hogy $a, b \in A$ és van folytonos $f : [0,1] \to X$, hogy: $f(a) = 0, f(1) = b, Ran(f) \subseteq A$. Legyen $g(t) = f(1-t)$ ekkor g mutatja, hogy $b \sim_0 a$.
$\sim_0$ tranzitív: Előző lemmából adódik. ■

12. Tétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $A \subseteq X$. Ha A ívszerűen összefüggő, akkor A összefüggő.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy A ívszerűen összefüggő, de nem összefüggő. Emiatt van nem konstans $f : A \to 2$ folytonos. $\exists a, b \in A : f(a) \neq f(b)$. A ívszerűen összefüggő, ezért van $g : [0,1] \to A$ folytonos, hogy $Ran(g) \subseteq A, g(0) = a, g(1) = b$. $f \circ g : [0,1] \to 2$ folytonos, $f \circ g(0) \neq f \circ g(1)$, ami ellentmondás, mert $[0,1]$ összefüggő. ■
Következmény: $a \sim_0 b \Rightarrow a \sim b$.
Megjegyzés: Az előző állítás megfordítása nem igaz, van összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő tér.

13. Állítás. *Legyen $X = [0,1] \times [0,1]$ és tekintsük a lexikografikus rendezést. Legyen τ az ehhez tartózó rendezés topológia. Ekkor (X, τ) összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás: **HF.** ■