Topológia

9. előadás

1. Állítás. *$\mathbb{R}^2$-en a szokásos topológiával, homeomorfak :*

i) körlemezek,

ii) háromszöglemezek,

iii) négyszöglemezek.

Bizonyítás

1. Minden egybevágóság, hasonlóság homeomorfizmus, így bármely két körlemez homeomorf.

2. Körlemez és négyszöglemez homeomorf, mert legyen k tetszőleges körlemez, N tetszőleges négyszöglemez. Hasonlósági transzformációk után feltehető, hogy k átmérője kisebb, mint egy N belsejében lévő kör sugara. Legyen f az a transzformáció amely k-t N-be tolja ekkor k eltoltja k'. Legyen g az a $k' \to N$ függvény, amely a körlemez pontjait sugárirányban úgy nyújtja, hogy k' határa N határára menjen. Ekkor $g \circ f$ a tekintett topológián homeomorfizmus.

3. Háromszögre ugyanígy.□

1. Definíció. *(X, τ)Brouwer-tulajdonságú, ha minden folytonos $f : X \to X$ függvénynek van fixpontja.*

2. Állítás. *Ha $(X, \tau), (Y, \sigma)$ homeomorfak és X Brouwer-tulajdonságú, akkor Y is ilyen tulajdonságú.*

Bizonyítás Legyen $g : X \to Y$ homeomorfizmus illetve$f : Y \to Y$ folytonos. Ekkor $g^{-1} \circ f \circ g : X \to X$ folytonos függvénynek létezik fixpontja azaz létezik $a : a = (g^{-1} \circ f \circ g)(a)$, tehát $g(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a))$ így $g(a)$ fixpontja f-nek.$\square$

1. Tétel. *(Brouwer fixpont-tétele) Legyen $n \geqslant 1, I = [0,1]$ Ekkor I^n Brouwer-tulajdonságú.*
Speciálisan: legyen $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1\}$ ez Brouwer tulajdonságú. Csak az előbbi állítást fogjuk bizonyítani, de előbb kell még előkészület.

1. Lemma. *Tegyük fel, hogy a H zárt háromszög lemeznek 1,2,3 a három csúcsa, és F_1, F_2, F_3 három zárt részhalmaza úgy, hogy ha $S \subseteq \{1,2,3\}$, akkor konv(S) $\subseteq \bigcup_{i \in S} F_i$, ahol konv(S) az S konvex burka. Ekkor $\bigcap_{i \in S} F_i \neq \emptyset$.*

Bizonyítás.

i) ha egy U szakaszt két nemüres zárt halmaz (F,G) uniója lefedi, akkor$F \cap G \neq \emptyset$, mert feltehető, hogy $F, G \subseteq U$, és indirekt feltesszük, hogy $F \cap G = \emptyset$. Ez utóbbi feltevés miatt $U \backslash F$ és $U \backslash G$ szintén lefedi U-t és $U \backslash F$ és $U \backslash G$ is diszjunkt, mert különben F és G nem fedné le a szakaszt. Ez ellentmondás, mivel U összefüggő $\to$ nem bontható fel 2 nyílt diszjunkt nemüres halmaz uniójára.

ii) az i) miatt 12 szakasz tartalmaz $F_1 \cap F_2$ - beli pontot. Speciálisan $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Legyen p az $F_1 \cap F_2$ 3 -hoz legközelebbi (egyik) eleme. Ilyen van, mert $F_1 \cap F_2$ zárt és a távolságfüggvény folytonos. Ha p nincs benne F_3-ban, akkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $B(p,\varepsilon) \subseteq U \backslash F_3$. Van olyan $U \subseteq B(p,\varepsilon)$ szakasz, melynek minden pontja közelebb van 3 -hoz, mint p és U párhuzamos 12-vel (ilyen szakasz azért van, mert $B(p,\varepsilon)$-ban van 3-hoz p-nél közelebbi pont, és a távolságfüggvény folytonos). Ekkor $U \subseteq B(p,\varepsilon) \cap (F_1 \cup F_2)$, mert $H \subseteq F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Ekkor U-n van $F_1 \cap F_2$- nek eleme. Ez ellentmondás, hiszen p a legközelebbi pont.

$\square$

A tétel bizonyítása
Legyen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ lineárisan függetlenek. $H = konv(a_1, a_2, a_3)$. Elég belátni, hogy H Brouwer tulajdonságú.
Ismert, hogy $H = \left\{\sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \forall i \ \lambda_i \geq 0\right\}$, ahol $\sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i$ konvex lineáris kombinációk. Legyen $f : H \to$ H folytonos. (Kell: $\exists a \in H \ f(a) = a$.) Ha $b \in H$, akkor $b = \lambda_1(b)a_1 + \lambda_2(b)a_2 + \lambda_3(b)a_3$. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

baricentrikus koordinátafüggvények).
Legyen $F_i = \{b \in H,\ \lambda_i(f(b)) \leq \lambda_i(b)\ \}\,(i = 1,2,3)$. Ezek zártak, mert minden folytonos és $\leq$ van F_i definíciójában. Legyen $b \in H$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $S \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}, b \in konv(S)$. Ekkor $b = \sum_{i \in S} \lambda_i(b) a_i,\ \sum_{i\in S} \lambda_i(b) = 1, \forall i\ \lambda_i(b) \geq 0$. Továbbá $\lambda_1(f(b)) + \lambda_2(f(b)) + \lambda_3(f(b)) = 1$.
Ha $\forall i \in S\ \lambda_i(f(b)) > \lambda_i(b)$, akkor az előző sor nem teljesülne. Emiatt $konv(s) \subseteq \cup_{i\in S} F_i$. Tehát F_1, F_2, F_3-ra teljesül a lemma feltétele, azaz $\exists b : b \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \to \forall i \quad \lambda_i(f(b)) \leq \lambda_i(b) \to$ mindkét oldalra összegezve 1-et kell kapni. Így $\forall i\ \ \lambda_i(f(b)) = \lambda_i(b)$ azaz $f(b) = b \to \surd$.

$\square$

2. Definíció. *$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ n dimenziós gömbfelület.*

3. Definíció. *$f : [0,1] \to X$ függvény zárt görbe, ha F folytonos és $f(0) = f(1)$. Ezek azonosíthatóak S^1 folytonos leképezéseivel ($S^1 \to X$ típusú függvényekkel).*

4. Definíció. *(X, τ) egyszeresen összefüggő, ha minden folytonos $f : S^1 \to X$ kiterjed egy folytonos $f^* : B^2 \to X$ -re (körlap).*

5. Definíció. *(X, τ) n-szeresen összefüggő, ha $\forall f : S^n \to X$ folytonos kiterjed $g : B^{n+1} \to X$ folytonosra.*

Megjegyzés. *(X, τ) ívszerűen összefüggő $\Longleftrightarrow 0$ -szorosan összefüggő.*

Második mesepélda:
Legyen $0 < r < 1 \in \mathbb{R}$
Legyen $K : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

3. Állítás. *Az előbbi K halmaz nem egyszeresen összefüggő.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy K 1- összefüggő. Legyen $f : S^1 \to K$ identitás. Ekkor f kiterjed B^2 -re: $\exists g : B^2 \to K$ folytonos kiterjesztés. Legyen $h : K \to K : (r, \varphi) \longmapsto (1, \varphi)$. Legyen l 0 középpontú 0< α< 2 π szögű forgatás. Ekkor $\varphi = l \circ h \circ g : B^2 \to B^2$ folytonos és φ -nek nincs fixpontja, mert $ran(\varphi) = S^1$, ezért φ -nek csak S^1-en lehetne fixpontja, de azokat g és h helyben hagyja, l-nek pedig nem létezik fixpontja. Másrészt a Brouwer- tétel szerint kellene, hogy legyen fixpontja. Ellentmondás $\Rightarrow$ k nem 1- összefüggő.

$\square$

Példa: A tórusz kétszeresen összefüggő, de nem egyszeresen- összefüggő.

HF: Igazoljuk, hogy a tórusz homeomorf $S^1 \times S^1$- gyel!