6. Előadás: Tietze kiterjesztési tétele

[1]

Először ismertetünk egy lemmát, melyet felhasználunk Tietze kiterjesztési tételének bizonyításához.

Lemma.

Legyenek $(X, \tau), (Y, \rho), (Z, \sigma)$ topologikus terek.

1. *Ha $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ folytonosak, akkor $g \circ f$ is folytonos.*
2. *Ha $Y = \mathbb{R}$ a szokásos topológiával, és f folytonos $\Leftrightarrow$*
   $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\forall a \in X)(\exists U \in \tau)(a \in U,\ f(U) \subseteq B_\epsilon(f(a)))$

Bizonyítás.

1. Legyen $U \in \sigma$, ekkor $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1} \circ g^{-1}(U)$, ahol $g^{-1}(U) \in \rho$ nyílt, mert g folytonos. Így $f^{-1} \circ g^{-1}(U) \in \tau$, hiszen feltettük, hogy f folytonos.
2. $(\Rightarrow)$: Tegyük fel, hogy f folytonos. Legyen $a \in X$, $\epsilon > 0$ tetszőleges rögzített. Mivel $B_\epsilon(f(a))$ nyílt, így f folytonossága miatt $U \doteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ is nyílt, és $a \in U$ teljesül.

   $(\Leftarrow)$: Legyen $V \subseteq \mathbb{R}$ nyílt.

   Állítás. $(\forall b \in f^{-1}(V))(\exists U_b \in \tau)(b \in U_b \subseteq f^{-1}(V))$

   Bizonyítás. Legyen $b \in f^{-1}(V)$, azaz $f(b) \in V$. Mivel V nyílt, így $\exists \epsilon > 0$, hogy $B_\epsilon(f(b)) \subseteq V$. A feltevésünk miatt $\exists U_b \in \tau$, hogy $b \in U_b$ valamint $f(U_b) \subseteq B_\epsilon(f(b))$. Összességében tehát arra jutottunk, hogy $\exists U_b \in \tau$, hogy $b \in U_b$ és $f(b) \in f(U_b) \subseteq V$, vagyis $b \in U_b \subseteq f^{-1}(V)$.

   □

   A fenti **Állításból** tehát adódik, hogy $\bigcup\limits_{b \in f^{-1}(V)} U_b \subseteq f^{-1}(V)$. A másik irányú tartalmazás triviális, így tehát $\bigcup\limits_{b \in f^{-1}(V)} U_b = f^{-1}(V)$ teljesül. U_b-k nyíltsága és a topológia definiáló tulajdonsága miatt így $f^{-1}(V)$ nyílt, vagyis f valóban folytonos.

   □

A fenti két lemma és az Uriszon-lemma ismeretében rátérhetünk Tietze tételére.

[1] Dr. Sági Gábor előadása alapján legépelte Horváth Bence

Tétel (Tietze kiterjesztési tétele)**.** *Legyen* (X, τ) *topologikus tér normális, és* $A \subseteq X$ *zárt. Ekkor:*

1. *Ha* $f : A \to [0, 1]$ *folytonos függvény, akkor* $\exists g : X \to [0, 1]$ *folytonos függvény, hogy* $g|_A = f$.
2. *Ha* $f : A \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, akkor* $\exists g : X \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, hogy* $g|_A = f$

Bizonyítás.

A tétel első állításának bizonyításához szükséges lépések:

0. lépés:

Legyenek $(X, \tau), (Y, \rho), (Z, \sigma)$ topologikus terek. Tegyük fel, hogy (Y, ϱ) és (Z, σ) homeomorfak.

Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

- Ha $A \subseteq X$ zárt, $f : A \to Y$ folytonos, akkor $\exists g : X \to Y$ folytonos, hogy $g|_A = f$.
- Ha $A \subseteq X$ zárt, $f : A \to Z$ folytonos, akkor $\exists g : X \to Z$ folytonos, hogy $g|_A = f$.

Az állítások szimmetrikus volta miatt elég megmutatni, hogy az első pontból következik második.

Legyen $\varphi : Y \to Z$ homeomorfizmus, és legyen $h : A \to Z$ folytonos. Ebből következően $\varphi^{-1} \circ h : A \to Y$ folytonos. Így az első pont miatt létezik $g : X \to Y$ folytonos, hogy $g|_A = \varphi^{-1} \circ h$. Így nyilván $\varphi \circ g$ is folytonos, valamint $\varphi \circ g|_A = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ h = h$.

Tehát az első pont valóban ekvivalens a másodikkal.

1. lépés:

Legyen $A \subseteq X$ zárt.

Azt állítjuk, hogy ha $r > 0$, $f : A \to [-r, r]$ folytonos, akkor

$$\begin{gathered} \exists g : X \to [-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r] \text{ folytonos, hogy} \\ \forall a \in A: \ |f(a) - g(a)| \leq \tfrac{2}{3}r. \end{gathered} \tag{1}$$

Lássuk ezt be a következőképp:

Legyen $F = f^{-1}\left(\left[-r, -\frac{1}{3}r\right]\right)$, $G = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}r, r\right]\right)$. Mivel f folytonos, így F, G zártak. $F \cap G = \emptyset$ teljesül, így alkalmazhatjuk az Uriszon-lemmát:

$$\exists g : X \to \left[-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r\right] \text{ folytonos, hogy } g\,|_F = -\tfrac{1}{3}r,\ g\,|_G = \tfrac{1}{3}r. \tag{2}$$

Legyen $a \in A$.

1. eset: $a \in F$ esetén $f(a) \in \left[-r, -\frac{1}{3}r\right]$, $g(a) = -\frac{1}{3}r$, így $|f(a) - g(a)| \le \frac{2}{3}r$.

2. eset: $a \in G$ esetén $f(a) \in \left[\frac{1}{3}r, r\right]$, $g(a) = \frac{1}{3}r$, így $|f(a) - g(a)| \le \frac{2}{3}r$.

3. eset: $a \in A \setminus (F \cup G)$ esetén $f(a) \in \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$, így $|f(a) - g(a)| \le \frac{2}{3}r$, mivel $g(a) \in \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$.

2. lépés:

Megadunk $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$-ra egy olyan $g_n : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, hogy:

1. $\forall x \in X$-re $|g_n(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
2. $\forall a \in A$-ra $\left| f(a) - \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(a) \right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Ez a következő lépésekben történik:

i) $n = 1$-re alkalmazzuk az **1. lépést** $r = 1$ választással. Így $f : A \to [-1, 1]$ folytonos függvényre

$$\begin{gathered}\exists g_1 : X \to \left[-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right]\ (\Leftrightarrow \forall x \in X : |g_1(x)| \le \tfrac{1}{3}) \text{ folytonos, hogy} \\ \forall a \in A :\ |f(a) - g_1(a)| \le \tfrac{2}{3}.\end{gathered} \tag{3}$$

ii) Tegyük fel, hogy $\forall k < n$-re g_k már adott. Ismét alkalmazzuk az **1. lépést** $r = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ választással az $f - \sum\limits_{k=1}^{n-1} g_k$ függvényre.

Ez megtehető, hiszen f folytonos, g_k-k folytonossága pedig indukciós feltevés. Ezzel:

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n-1} g_k\right) : X \to \left[-\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1}, \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right]\text{-re}$$

$$\exists g_n : X \to \left[-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1}, \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right] \text{ folytonos} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X : |g_n(x)| \leq \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ folytonos, hogy} \tag{4}$$

$$\forall a \in A : \left|f(a) - \sum_{k=1}^{n} g_k(a)\right| \leq \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n}.$$

3. lépés:

Legyen $g : X \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in X : \; g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

Ez jól definiált, hiszen a **2. lépésben** megadott konstrukció miatt $\forall x \in X$-re

$$| \; g_n(x)| \leq \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ így}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \leq \tfrac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1. \tag{5}$$

A következőkben azt szeretnénk belátni, hogy g folytonos függvény. Ehhez először tegyünk egy kis kitérőt. Vegyük észre, hogy $\forall x \in X, \; n \in \mathbb{N}$-re:

$$\left|g(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \tfrac{1}{3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{k-1} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{k} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n}. \tag{6}$$

Emiatt $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k$ egyenletesen konvergál g-hez.

A **Lemma** miatt elegendő belátnunk, hogy ha $x \in X, \; \epsilon > 0$ tetszőleges rögzített, akkor $\exists U \in \tau : \; g(U) \subseteq B_\epsilon(g(x)), \; x \in U$.

Legyen tehát $x \in X, \; \epsilon > 0$ tetszőleges rögzített.

Nyilván $\exists N \in \mathbb{N} : \; \left(\tfrac{2}{3}\right)^N < \tfrac{\epsilon}{3}$. Ezzel és az előzőekben megmutatott egyenletes konvergenciával adódik:

$$\forall y \in X : \; \left|g(y) - \sum_{k=1}^{N} g_k(y)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^N < \frac{\epsilon}{3}. \tag{7}$$

Mivel $\sum\limits_{k=1}^{N} g_k$ folytonos, így a **Lemma** miatt a rögzített x és ϵ-unkhoz

$$\exists U \in \tau : \ x \in U, \ \left(\sum_{k=1}^{N} g_k\right)(U) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{3}}\left(\sum_{k=1}^{N} g_k(x)\right). \tag{8}$$

Így tehát $\forall z \in U$-ra:

$$|g(x) - g(z)| =$$

$$= \left| g(x) - \sum_{k=1}^{N} g_k(x) + \sum_{k=1}^{N} g_k(x) - \sum_{k=1}^{N} g_k(z) + \sum_{k=1}^{N} g_k(z) - g(z) \right| \leq \tag{9}$$

$$\leq \left| g(x) - \sum_{k=1}^{N} g_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} g_k(x) - \sum_{k=1}^{N} g_k(z) \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} g_k(z) - g(z) \right| < \epsilon,$$

mivel (7) miatt az első és harmadik tag kisebb $\frac{\epsilon}{3}$-nál, a második tag pedig (8) miatt kisebb $\frac{\epsilon}{3}$-nál.
Ezzel beláttuk, hogy $x \in X$, $\epsilon > 0$ tetszőleges rögzítettre $\exists U \in \tau : \ g(U) \subseteq B_\epsilon(g(x))$, $x \in U$, vagyis g folytonos.

Végül $\forall a \in A$: $\left| f(a) - \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$, midőn $n \longrightarrow \infty$; így $f(a) = g(a)$.

Ezzel bebizonyítottuk Tietze kiterjesztési tételének első állítását.

A tétel második részének belátásához vegyük észre, hogy $\mathbb{R}$ homeomorf $(-1, 1)$ nyílt valós intervallummal. ($\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ például homeomorfizmus lesz.)

A tétel első részének bizonyításakor konstruált **0. lépés** miatt elég megmutatni, hogy ha $f : \ A \to (-1, 1)$ folytonos, akkor kiterjeszthető.

A Tietze-tétel első állítása miatt $\exists g' : \ X \to [-1, 1]$ folytonos, hogy $g' \mid_A = f$. Legyen $F = (g')^{-1}(\{-1, 1\})$, ekkor F, A zártak, $F \cap A = \emptyset$, hiszen $g' \mid_A = f$ és $Ran(f) \subseteq (-1, 1)$. Így az Uriszon-lemma miatt van olyan folytonos h függvény, hogy $h : \ X \to [0, 1]$, $h \mid_F = 0$, $h \mid_A = 1$.

Legyen $g : \ X \to (-1, 1)$, $g(x) = h(x) g'(x)$, ekkor nyilván folytonos a g függvény. Könnyen adódik, hogy $Ran(g) \subseteq (-1, 1)$, $g \mid_A = g' \mid_A = f$, tehát a tétel második részét is beláttuk.

$\square$